SOLUCIONARIO DEMIDOVICH

TOMO II

ANALISIS MATEMATICO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

WWW.SOLUCIONARIOS.NET

Eduardo Espinoza Ramos

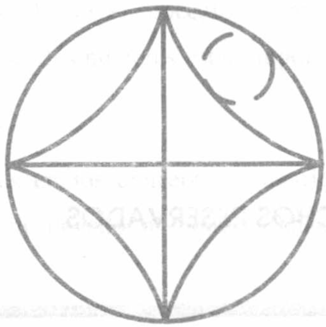
Lima - Perú

ANALISIS MATEMATICO II

SOLUCIONARIO DEMIDOVICH

TOMO II

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$



- **INTEGRAL INDEFINIDA**
- **INTEGRAL DEFINIDA**
- **INTEGRAL IMPROPIA**
- **APLICACIONES**

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

INDICE

CAPÍTULO IV

INTEGRAL INDEFINIDA

CAPÍTULO V

LA INTEGRAL DEFINIDA

CAPÍTULO VI

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

CAPÍTULO IV

4. INTEGRAL INDEFINIDA.

4.1. REGLAS PRINCIPALES PARA LA INTEGRACION.

1) $F'(x) = f(x)$ entonces $\int f(x)dx = F(x) + c$, c constante.

2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, k es una constante.

3) $\int (f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

4) Si $\int f(x)dx = F(x) + c$ y $u = \psi(x)$, se tiene: $\int f(u)du = F(u) + c$

TABLA DE INTEGRACION INMEDIATA.

Sea u una función de x.

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$

2) $\int u^n du = \frac{u^n + 1}{n+1} + c$ $n \neq -1$

3) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

4) $\int \frac{du}{u^{2+} a^2} = \frac{1}{a} arc.\text{tg}(\frac{u}{a}) + c$

5) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln|\frac{u-a}{u+a}| + c$, $a \neq 0$

6) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln|\frac{u+a}{u-a}| + c$

(7) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln(u+\sqrt{u^{2+a}})+c$, $a \neq 0$

(8) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc.\text{sen}\left(\frac{u}{a}\right)+c = -arc.\cos\left(\frac{u}{a}\right)+c_1$;$a>0$

(9) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)}+c$, $a>0$

(10) $\int e^u du = e^u + c$

(11) $\int \text{sen}(u)du = -\cos(u)+c$

(12) $\int \cos u \, du = sen\, u + c$

(13) $\int \text{tg}\, u.du = -\ln|\cos u| + c = \ln|\sec u| + c_1$

(14) $\int c\,\text{tg}\, u.du = \ln|\text{sen}\, u| + c$

(15) $\int \sec^2 u.du = \text{tg}\, u + c$

(16) $\int \csc^2 u.du = -c\,\text{tg}\, u + c$

(17) $\int \csc u.du = \ln|\sec u + tgu| + c$

(18) $\int \csc u.du = L_n|\csc u - c\,\text{tg}\, u| + c$

(19) $\int \text{senh}(u)du = \cosh(u)+c$

(20) $\int \cosh(u)du = \text{senh}(u)+c$

(21) $\int \csc^2 h(u).du = c\,\text{tgh}(u)+c$

(22) $\int \sec^2 h(u)du = \text{tgh}(u)+c$

Hallar las siguientes integrales, empleando las siguientes reglas de integración:

1031 $\int 5a^2x^2dx$

Desarrollo

$$\int 5a^2x^2dx = 5a^2\int x^2dx = \frac{5}{3}a^2x^3+c$$

1032 $\int (6x^2+8x+3)dx.$

Desarrollo

$$\int (6x^2+8x+3)dx = 6\int x^2dx + 8\int xdx + 3\int dx + c = 2x^3+4x^2+3x+c$$

1033 $\int x(x+a)(x+b)dx$

Desarrollo

$$\int x(x+a)\,(x+b)dx = \int (x^3+(a+b)x^2+abx)dx = \frac{x^4}{4}+\frac{a+b}{3}x^3+\frac{ab}{2}x^2+c$$

1034 $\int (a+bx^3)^2\,dx.$

Desarrollo

$$\int (a+bx^3)^2\,dx = \int (a^2+2abx^3+b^2x^6)dx = a^2x+\frac{ab}{2}x^4+\frac{b^2x^7}{7}+c$$

1035 $\int \sqrt{2px\;dx.}$

Desarrollo

$$\int \sqrt{2px}\;dx = \sqrt{2p}\int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\;\sqrt{2p}+c = \frac{2}{3}\;x\sqrt{2px}+c$$

1036 $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \int x^{-\frac{1}{n}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1}+c = \frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}+c$$

1037 $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\ dx.$

Desarrollo

sea $\quad u = nx \quad \rightarrow \quad du = ndx \rightarrow \quad dx = \frac{du}{n}$

$$\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\ dx = \int u^{\frac{1-n}{n}} \frac{du}{n} = \frac{1}{n}\int u^{\frac{1-n}{n}}\ du = (nx)^{\frac{1}{n}} + c$$

1038 $\int (a^{2/3} - x^{2/3})^3\, dx.$

Desarrollo

$$\int (a^{2/3} - x^{2/3})^3\, dx = \int (a^2 - 3a^{4/3}x^{2/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2)dx$$

$$= a^2x - \frac{9}{5}a^{4/3}x^{5/3} + \frac{9}{7}a^{2/3}x^{7/3} - \frac{x^3}{3} + c$$

1039 $\int (\sqrt{x}+1)\ (x-\sqrt{x}+1)dx.$

Desarrollo

$$\int (\sqrt{x}+1)\ (x-\sqrt{x}+1)dx = \int (x^{3/2}+1)dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + x + c = \frac{2x^2}{5}\sqrt{x} + x + c$$

1040 $\int \frac{(x^2+1)\ (x^2-2)}{3\sqrt{x^2}}\ dx$

Desarrollo

$$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{3\sqrt{x^2}}dx = \int \frac{x^4 - x^2 - 2}{3\sqrt{x^2}}dx = \int (x^{10/3} - x^{4/3} - 2x^{-2/3})dx$$

$$= \frac{3}{13}x^4\sqrt[3]{x} - \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[3]{x+c}$$

1041 $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$

Desarrollo

$$\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^{2m} - 2x^{m+n} + x^{2n}}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{\frac{4m-1}{2}} - 2x^{\frac{2m+2n-1}{2}} + x^{\frac{4n-1}{2}})dx$$

$$= \frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1} - \frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1} + c$$

1042 $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\,dx.$

Desarrollo

$$\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\,dx = \int \frac{a^2 - 4a\sqrt{ax} + 6ax - 4x\sqrt{ax} + x^2}{\sqrt{ax}}\,dx$$

$$= \int [a^2(ax)^{-1/2} - 4a + 6\sqrt{ax} - 4x + x^2(ax)^{-1/2}]\,dx$$

$$= 2a\sqrt{ax} - 4ax + 4x\sqrt{ax} - 2x^2 + \frac{2x^3}{5\sqrt{ax}} + c$$

1043 $\int \frac{dx}{x^2 + 7}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{x^2+7} = \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{7})^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}arc.\operatorname{tg}(\frac{x}{\sqrt{7}}) + c$$

1044 $\int \frac{dx}{x^2-10}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{x^2-10} = \int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{10})^2} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left|\frac{x+\sqrt{10}}{x-\sqrt{10}}\right| + c$$

1045 $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

Desarrollo

Por la fórmula 7 se tiene: $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{1/2}} = \ln|\,x+\sqrt{x^2+4}\,|+c$

1046 $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2-x^2}} = arc.\text{sen}\ (\frac{x}{2\sqrt{2}}) + c\,,$$ resulta de la fórmula 8.

1047 $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx = \int (\frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} - \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = arc.\text{sen}\ (\frac{x}{\sqrt{2}}) - Ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right| + c$$

por fórmulas 7 y 8.

1048 **a)** $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

Desarrollo

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \operatorname{tg} x - x + c.$$

b) $\int \operatorname{tgh}^2 x dx.$

Desarrollo

$$\int \operatorname{tgh}^2 x dx = \int (1 - \sec^2 hx)dx = x - \operatorname{tgh} + c.$$

1049 **a)** $\int c\operatorname{tg}^2 x dx.$

Desarrollo

$$\int c\operatorname{tg}^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1)dx \; c\operatorname{tg} x - x + c.$$

b) $\int c\operatorname{tgh}^2 x dx.$

Desarrollo

$$\int c\operatorname{tgh}^2 x dx = \int (1 - \csc h^2 x)dx = x - x\operatorname{tgh} + c.$$

1050 $\int 3^x e^x dx$

Desarrollo

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + c.$$

4.2. INTEGRACIÓN MEDIANTE LA INTRODUCCIÓN BAJO EL SIGNO DE LA DIFERENCIAL.

Ampliaremos la tabla de integración transformando, la integral dada a la forma:

$$\int f(\psi(x)).\psi'(x)dx = \int f(u)du\ ,\ donde\ u = \psi(x)$$

a este tipo de transformaciones se llama introducción bajo el signo de la diferencial.

1051 $\int \frac{adx}{a-x}$

Desarrollo

sea $u = a - x \to du = -dx \to dx = -du$

$$\int \frac{adx}{a-x} = a\int \frac{dx}{a-x} = -a\int \frac{du}{u} = -aLn^{u} + aLn^{c} = aLn\,|\frac{c}{a-x}|$$

1052 $\int \frac{2x+3}{2x+1}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{1-3x}{3+2x}dx \int (-\frac{3}{2}+\frac{11}{2}(\frac{1}{2x+3}))dx - \frac{3}{2}x + \frac{11}{4}Ln\,|\,2x+3\,| + c$$

1054 $\int \frac{xdx}{a+bx}$

Desarrollo

$$\int \frac{xdx}{a+bx} = \int [\frac{1}{b} - \frac{a}{b}(\frac{1}{a+bx})]dx = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}Ln\,|\,a+bx\,| + c$$

1055 $\int \frac{ax+b}{ax+\beta}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}dx = \int [\frac{a}{\alpha}+\frac{\alpha b-a\beta}{\alpha}(\frac{1}{\alpha+\beta})]dx = \frac{a}{\alpha}x+\frac{\alpha b-a\beta}{\alpha^2}\ln|\alpha x+\beta|+c$$

1056 $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}dx = \int (x+1+\frac{2}{x-1})dx = \frac{x^2}{x}+x+2\ln|x-1|+c$$

1057 $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx = \int (x+2+\frac{1}{x+3})dx = \frac{x^2}{2}+2x+\ln|x+3|+c$$

1058 $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx = \int (x^3+x^2+2x+2+\frac{3}{x+1})dx$$

$$= \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+2x+3\ln|x-1|+c$$

1059 $\int (a+\frac{b}{x-a})^2 dx$

Desarrollo

$$\int (a+\frac{b}{x-a})^2 dx = \int (a^2+\frac{2ab}{x-a}+\frac{b^2}{(x-a)^2})dx = a^2x+2ab\ln|x-a|-\frac{b^2}{x-a}+c$$

1060 $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$

Desarrollo

sea $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$, $x = u - 1$

$$\int \frac{xdx}{(x+1)^2} = \int \frac{u-1}{u^2}du = \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2})du = \ln|u| + \frac{1}{u} + c = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

1061 $\int \frac{b\,dy}{\sqrt{1-y}}$

Desarrollo

Sea $u = 1 - y \Rightarrow dy = -du$

$$\int \frac{b\,dy}{\sqrt{1-y}} = b\int (1-y)^{-1/2}dy = -b\int u^{-1/2}du = -2bu^{1/2} + c = -2b\sqrt{1-y} + c$$

1062 $\int \sqrt{a-bx}\,dx.$

Desarrollo

Sea $u = a - bx \Rightarrow dx = -\frac{du}{b}$

$$\int \sqrt{a-bx}\,dx = \int u^{1/2}(-\frac{du}{b}) = -\frac{1}{b}\int u^{1/2}du = -\frac{2}{3b}u\sqrt{u} + c = -\frac{2}{3b}(a-bx)\sqrt{a-bx} + c$$

1063 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Desarrollo

Sea $u = x^2 + 1 \Rightarrow xdx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int (x^2+1)^{-1/2}xdx = \int u^{-1/2}\frac{du}{2} = \sqrt{u}+c = \sqrt{x^2+1}+c$$

1064 $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx = \int (\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x})dx = 2\sqrt{x}+\frac{\ln^2 x}{2}+c$$

1065 $\int \frac{dx}{3x^2+5}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{3x^2+5} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}.\sqrt{5}}arctg(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}})+c = \frac{1}{\sqrt{15}}arctg(x\sqrt{\frac{3}{5}})+c$$

1066 $\int \frac{dx}{7x^2+8}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{7x^2-8} = \int \frac{dx}{(\sqrt{7}x)^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}.\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{7}x-2\sqrt{2}}{\sqrt{7}x+2\sqrt{2}}|+c$$

1067 $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$; $0 < b < a$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{a-b}}\int \frac{\sqrt{a-b}\,dx}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b}x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a-b}.\sqrt{a+b}}\ln|\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}x}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}x}|+c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}x}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}x} \right| + c$$

1068 $\int \frac{x^2 dx}{x^2+2}$

Desarrollo

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+2} = \int (1 - \frac{2}{x^2+2}) dx = x - \sqrt{2} \operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c$$

1069 $\int \frac{x^3 dx}{a^2-x^2}$

Desarrollo

$$\int \frac{x^3 dx}{a^2-x^2} = -\int (x + \frac{a^2 x}{x^2-a^2}) dx = -(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln | x^2-a^2 |) + c$$

1070 $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4} dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4} dx = \int (1 - \frac{5x-2}{x^2+4}) dx = \int (1 - \frac{5x}{x^2+4} + \frac{2}{x^2+4}) dx$$

$$= x - \frac{5}{2} \ln | x^2+4 | + arc.\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) + c$$

1071 $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7+(2\sqrt{2}x)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2\sqrt{2} dx}{\sqrt{7+(2\sqrt{2}x)^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} Ln|2\sqrt{2}x + \sqrt{7+8x^2}| + c\text{ , por la fórmula 7}$$

1072 $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}) + c$$

1073 $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx = \int \frac{2x}{3x^2-2}dx - 5\int \frac{dx}{3x^2-2} = \frac{1}{3}\ln|3x^2-2| - \frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}dx}{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x^2-2| - \frac{5}{2\sqrt{3}.\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x^2-2| - \frac{5}{2\sqrt{6}}\ln|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}| + c$$

1074 $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx = \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x^2+\frac{7}{5}} - \frac{1}{5}\int \frac{2x\,dx}{x^2+\frac{7}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}) - \frac{1}{5}\ln|5x^2+7| + c$$

$$= \frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{5}{7}}x) - \frac{1}{5}\ln|5x^2+7| + c$$

1075 $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{5x^{2+1}}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}} = \frac{3}{10}\int \frac{10xdx}{\sqrt{5x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{(\sqrt{5}x)^2+1}}$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} Ln\,|\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2+1}\,| + c$$

1076 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \sqrt{x^2-4} + 3\ln|\,x+\sqrt{x^2-4}\,| + c$$, por la fórmula 7

1077 $\int \frac{xdx}{x^2-5}$

Desarrollo

$$\int \frac{xdx}{x^2-5} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-5}dx = \frac{1}{2}\ln|\,x^2-5\,| + c$$

1078 $\int \frac{x}{2x^2+3}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{xdx}{2x^2+3} = \frac{1}{4}\int \frac{4xdx}{2x^2+3} = \frac{1}{4}\ln|\,2x^2+3\,| + c$$

1079 $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx = \int \frac{ax}{a^2x^2+b^2}dx + \int \frac{dbx}{a^2x^2+b^2}$$

$$= \frac{1}{2a}\ln|a^2x^2+b^2| + \frac{1}{a}arc.\text{tg}(\frac{ax}{b}) + c$$

1080 $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$

Desarrollo

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2}arc.\text{sen}(\frac{x^2}{a^2}) + c$$

1081 $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$

Desarrollo

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^6} = \int \frac{x^2dx}{1+(x^3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{1+(x^3)^2} = \frac{1}{3}\text{arctg}(x^3) + c$$

1082 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$

Desarrollo

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{(x^3)^2-1}} = \frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{x^6-1}|+c,$$ por la fórmula 7.

1083 $\int \sqrt{\frac{\text{arcsen}\, x}{1-x^2}}dx$

Desarrollo

$$\int \sqrt{\frac{\text{arcsen}\, x}{1-x^2}}dx = \int (\text{arcsen}\, x)^{\frac{1}{2}}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

donde u = arcsen x $\Rightarrow$ $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(\text{arcsen } x)^{\frac{3}{2}} + c$$

1084 $\displaystyle\int \frac{\text{arctg}(\frac{x}{2})}{4+x^2} dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\text{arctg}(\frac{x}{2})}{4+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\,\text{arctg}(\frac{x}{2})}{4+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \text{arctg}(\frac{x}{2})\frac{2\,dx}{4+x^2} = \frac{\text{arctg}^2(\frac{x}{2})}{4} + c$$

1085 $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\text{arctg}\,2x}}{1+4x^2} dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x-\sqrt{\text{arctg}\,2x}}{1+4x^2} dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x\,dx}{1+4x^2} - \frac{1}{2}\int (\text{arctg}\,2x)^{\frac{1}{2}} \frac{2\,dx}{1+4x^2}$$

$$= \frac{1}{8}\ln|1+4x^2| - \frac{1}{3}(\text{arctg}\,2x)^{\frac{3}{2}} + c$$

1086 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}} = \int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

donde $u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int u^{-\frac{1}{2}} du = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} + c$$

1087 $\int ae^{-mx} dx$

Desarrollo

Sea u = -mx $\Rightarrow dx = -\frac{du}{m}$

$$\int ae^{-mx} dx = a\int e^u (-\frac{du}{m}) = -\frac{a}{m}\int e^u du = -\frac{a}{m}e^u + c = -\frac{a}{m}e^{-mx} + c$$

1088 $\int 4^{2-3x} dx$

Desarrollo

$\int 4^{2-3x} dx = 16\int 4^{-3x} dx$, sea u = -3x $\Rightarrow dx = -\frac{du}{3}$

$$= 16\int 4^u (-\frac{du}{3}) = -\frac{16}{3}\int 4^u du = -\frac{16}{3}.\frac{4^u}{\ln(4)} = \frac{-4^2.4^{-3x}}{3\ln 4} = -\frac{4^{2-3x}}{3\ln 4} + c$$

1089 $\int (e^t - e^{-t}) dt$

Desarrollo

$$\int (e^t - e^{-t}) dt = \int e^t dt - \int e^{-t} dt = e^t + e^{-t} + c$$

1090 $\int (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2 dx$

Desarrollo

$$\int (e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2 dx=\int (e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx=\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}+c$$

1091 $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}dx=\int \frac{a^{2x}-2a^x b^x+b^{2x}}{a^x b^x}dx=\int ((\frac{a}{b})^x-2+(\frac{b}{a})^x)dx$$

$$=\frac{(\frac{a}{b})^x}{\ln(\frac{a}{b})}+\frac{(\frac{b}{a})x}{\ln(\frac{b}{a})}-2x+c=\frac{1}{\ln a-\ln b}((\frac{a}{b})^x+(\frac{b}{a})^x)-2x+c$$

1092 $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx=\int (\frac{a^{2x}}{\sqrt{a^x}}-\frac{1}{\sqrt{a^x}})dx=\int (a^{\frac{3x}{2}}-a^{-\frac{x}{2}})dx=\frac{2}{3}.\frac{a^{\frac{3x}{2}}}{\ln a}+\frac{2.a^{-\frac{x}{2}}}{\ln a}+c$$

1093 $\int e^{-(x^2+1)}x\,dx$

Desarrollo

Sea $u=-(x^2+1)$ $\Rightarrow$ du = -2x dx $\Rightarrow$ $x\,dx=-\frac{du}{2}$

$$\int e^{-(x^2+1)}x\,dx=\int e^u(-\frac{du}{2})=-\frac{1}{2}\int e^u du=-\frac{1}{2}e^u+c=-\frac{1}{2}e^{-(x^2+1)}+c$$

1094 $\int x.7^{x^2}dx$

Desarrollo

Sea $u = x^2 \Rightarrow$ du = 2x dx $\Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\int x.7^{x^2}dx = \int 7^{x^2}.x\,dx = \int 7^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int 7^u du = \frac{1}{2}\frac{7^u}{\ln(7)} + c = \frac{1}{2\ln(7)}7^{x^2} + c$$

1095 $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

Desarrollo

Sea $u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -du$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int e^u(-du) = -\int e^u du = -e^u + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

1096 $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

Desarrollo

Sea $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int 5^u.2\,du = 2\int 5^u du = \frac{2.5^u}{\ln(5)} + c = \frac{2}{\ln(5)}5^{\sqrt{x}} + c$$

1097 $\int \frac{e^x}{e^x - 1}dx$

Desarrollo

Sea $u = e^x - 1 \Rightarrow du = e^x dx$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x - 1} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|e^x - 1| + c$$

1098 $\int e^x\sqrt{a-be^x}\,dx$

Desarrollo

Sea $u=a-be^x \Rightarrow du=-be^x dx \Rightarrow e^x dx=-\frac{du}{b}$

$$\int (a-be^x)^{\frac{1}{2}}e^x dx=\int u^{\frac{1}{2}}(-\frac{du}{b})=-\frac{1}{b}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{2}{3b}u^{\frac{3}{2}}+c=-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-be^x)^3}+c$$

1099 $\int (e^{\frac{x}{a}}+1)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{x}{a}}dx$

Desarrollo

Sea $u=e^{\frac{x}{a}}+1 \Rightarrow du=e^{\frac{x}{a}}\frac{dx}{a} \Rightarrow a\,du=e^{\frac{x}{a}}dx$

$$\int (e^{\frac{x}{a}}+1)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{x}{a}}dx=\int u^{\frac{1}{3}}a\,du=a\int u^{\frac{1}{3}}du=\frac{3a}{4}u^{\frac{4}{3}}+c=\frac{3a}{4}(e^{\frac{x}{a}}-1)^{\frac{4}{3}}+c$$

1100 $\int \frac{dx}{2^x+3}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{2^x+3}=\frac{1}{3}\int (1-\frac{2^x}{2^x+3})dx=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{\ln 2}\ln|2^x+3|)+c$$

1101 $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}$

Desarrollo

Sea $u=a^x \Rightarrow du=a^x\ln a\,dx \Rightarrow a^x dx=\frac{du}{\ln a}$

$$\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}} = \frac{1}{\ln a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg} u + c = \frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}(a^x) + c$$

1102 $\displaystyle\int \frac{e^{-bx}dx}{1+e^{-2bx}}$

Desarrollo

Sea $u = e^{-bx} \Rightarrow du = -be^{-bx}dx \Rightarrow e^{-bx}dx = -\dfrac{du}{b}$

$$\int \frac{e^{-bx}dx}{1+e^{-2bx}} = -\frac{1}{b}\int \frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{b}\operatorname{arctg}(u) + c = -\frac{1}{b}\operatorname{arctg}(e^{-bx}) + c$$

1103 $\displaystyle\int \frac{e^t dt}{1-e^{2t}}$

Desarrollo

Sea $u = e^t \Rightarrow du = e^t dt$

$$\int \frac{e^t dt}{1-e^{2t}} = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+e^t}{1-e^t}\right| + c$$

1104 $\displaystyle\int \operatorname{sen}(a+bx)dx$

Desarrollo

Sea u = a + bx $\Rightarrow$ du = b dx $\Rightarrow$ $dx = \dfrac{du}{b}$

$$\int \operatorname{sen}(a+bx)dx = \int \operatorname{sen}(u)\frac{du}{b} = \frac{1}{b}\int \operatorname{sen}(u)du$$

$$= -\frac{1}{b}\cos(u) + c = -\frac{1}{b}\cos(a+bx) + c$$

1105 $\int \cos(\frac{x}{\sqrt{5}})dx$

Desarrollo

Sea $u = \frac{x}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{5}du = dx$

$$\int \cos(\frac{x}{\sqrt{5}})dx = \int \cos(u)\sqrt{5}du = \sqrt{5}\int \cos(u)du = \sqrt{5}\,\text{sen}(u) + c = \sqrt{5}\,\text{sen}(\frac{x}{\sqrt{5}}) + c$$

1106 $\int (\cos(ax) + \text{sen}(ax))^2 dx$

Desarrollo

$$\int (\cos(ax) + \text{sen}(ax))^2 dx = \int (\cos^2(ax) + 2\,\text{sen}(ax).\cos(ax) + \text{sen}^2(ax))dx$$

$$= \int (1 + 2\,\text{sen}(ax).\cos(ax))dx = x - \frac{1}{2a}\cos(2ax) + c$$

1107 $\int \cos(\sqrt{x}).\frac{dx}{\sqrt{x}}$

Desarrollo

Sea $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$

$$\int \cos(\sqrt{x}).\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \cos(u).2du = 2\int \cos(u)du = 2\,\text{sen}(u) + c = 2\,\text{sen}(\sqrt{x}) + c$$

1108 $\int \text{sen}(\log x).\frac{dx}{x}$

Desarrollo

Sea $u = \log x \Rightarrow du = \frac{dx}{\ln(10)x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \ln(10)du$

$$\int \operatorname{sen}(\log x)\frac{dx}{x} = \int \operatorname{sen}(u).\ln(10).du = \ln(10)\int \operatorname{sen}(u)du$$

$$= -\ln(10)\cos(u) + c = -\ln(10)\cos(\log x) + c$$

1109 $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Desarrollo

Usar la identidad: $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + c$$

1110 $\int \cos^2 x\,dx$

Desarrollo

Usar la identidad $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + c$$

1111 $\int \sec^2(ax+b)dx$

Desarrollo

Sea $u = ax + b \Rightarrow dx = \dfrac{du}{a}$

$$\int \sec^2(ax+b)dx = \int \sec^2 u\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int \sec^2 u\,du = \frac{1}{a}\operatorname{tg} u + c = \frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b) + c$$

1112 $\int c\operatorname{tg}^2(ax)dx$

Desarrollo

Usar la identidad: $1+c\,\text{tg}^2\,x=\csc^2\,x$

$$\int c\,\text{tg}^2(ax).dx=\int(\csc^2(ax)-1)dx=-\frac{c\,\text{tg}(ax)}{a}-x+c$$

1113 $\displaystyle\int\frac{dx}{\text{sen}(\frac{x}{a})}$

Desarrollo

Se conoce que $\text{sen}\,\dfrac{x}{a}=2\,\text{sen}(\dfrac{x}{2a}).\cos(\dfrac{x}{2a})$

$$\int\frac{dx}{\text{sen}(\frac{x}{a})}=\int\frac{dx}{2\,\text{sen}(\frac{x}{2a}).\cos(\frac{x}{2a})}=\frac{1}{2}\int\frac{\sec(\frac{x}{2a})}{\text{sen}(\frac{x}{2a})}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2(\frac{x}{2a})}{\text{sen}(\frac{x}{2a}).\sec(\frac{x}{2a})}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2(\frac{x}{2a})}{\text{tg}(\frac{x}{2a})}dx$$

Sea $u=\text{tg}(\dfrac{x}{2a})\ \Rightarrow\ du=\sec^2(\dfrac{x}{2a}).\dfrac{dx}{2a}$

De donde se tiene: $\sec^2(\dfrac{x}{2a})dx=2a\,dx$

$$\int\frac{dx}{\text{sen}(\frac{x}{a})}=\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2(\frac{x}{2a})}{\text{tg}(\frac{x}{2a})}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2a\,du}{u}=a\ln|u|+c\ =a\ln|\,\text{tg}(\frac{x}{2a})\,|+c$$

1114 $\int \frac{dx}{3\cos(5x-\frac{\pi}{4})}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{3\cos(5x-\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{15}\ln|\operatorname{tg}[\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}]|+c$$

1115 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(ax+b)}$

Desarrollo

Se conoce $\operatorname{sen}(ax+b)=2\operatorname{sen}(\frac{ax+b}{2}).\cos(\frac{ax+b}{2})$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(ax+b)}=\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}(\frac{ax+b}{2}).\cos(\frac{ax+b}{2})}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\sec(\frac{ax+b}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{ax+b}{2})}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\sec^2(\frac{ax+b}{2})}{\operatorname{tg}(\frac{ax+b}{2})}dx=\frac{1}{a}\ln|\operatorname{tg}(\frac{ax+b}{2})|+c$$

1116 $\int \frac{x\,dx}{\cos^2(x^2)}$

Desarrollo

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2(x^2)}=\int \sec^2(x^2).x\,dx \quad \text{sea} \quad u=x^2;\ \frac{du}{2}=x\,dx$$

$$\int \sec^2 u.\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2)+c$$

1117 $\int x\,\text{sen}(1-x^2)dx$

Desarrollo

Sea $u = 1-x^2 \Rightarrow$ du = -2x dx $\Rightarrow$ $x\,dx = -\frac{du}{2}$

$$\int x\,\text{sen}(1-x^2)dx = \int \text{sen}(1-x^2)x\,dx = \int \text{sen}\,u.(-\frac{du}{2})$$

$$= -\frac{1}{2}\int \text{sen}\,u\,du = \frac{1}{2}\cos u + c = \frac{1}{2}\cos(1-x^2)+c$$

1118 $\int (\frac{1}{\text{sen}(x\sqrt{2})}-1)^2 dx$

Desarrollo

$$\int (\frac{1}{\text{sen}\,x\sqrt{2}}-1)^2 dx = \int (\csc x\sqrt{2}-1)^2 dx = \int (\csc^2(x\sqrt{2})-2\csc(x\sqrt{2})+1)dx$$

$$= \int (1+\csc^2(x\sqrt{2})-\frac{2}{\text{sen}(x\sqrt{2})})dx = x-\frac{1}{\sqrt{2}}c\,\text{tg}(x\sqrt{2})-\frac{2}{\sqrt{2}}\ln|\text{tg}(\frac{x\sqrt{2}}{2})|+c$$

1119 $\int \text{tg}\,x\,dx$

Desarrollo

$$\int \text{tg}\,x\,dx = \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|+c$$

1120 $\int c\,\text{tg}\,x\,dx$

Desarrollo

$$\int c\,\text{tg}\,x\,dx = \int \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}dx = \ln|\text{sen}\,x|+c$$

1121 $\int c\,\mathrm{tg}(\frac{x}{a-b})dx$

Desarrollo

Sea $u=\frac{x}{a-b} \Rightarrow dx=(a-b)du$

$$\int c\,\mathrm{tg}(\frac{x}{a-b})dx=\int c\,\mathrm{tg}\,u.(a-b)du=(a-b)\int c\,\mathrm{tg}\,u\,du$$

$$=(a-b)\ln|\mathrm{sen}\,u|+c=(a-b)\ln|\mathrm{sen}(\frac{x}{a-b})|+c$$

1122 $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}(\frac{x}{5})}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\mathrm{tg}(\frac{x}{5})}=\int c\,\mathrm{tg}(\frac{x}{5})dx=\int \frac{\cos(\frac{x}{5})}{\mathrm{sen}(\frac{x}{5})}dx=5\ln|\mathrm{sen}(\frac{x}{5})|+c$$

1123 $\int \mathrm{tg}(\sqrt{x}).\frac{dx}{\sqrt{x}}$

Desarrollo

Sea $z=\sqrt{x} \Rightarrow dz=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\,dz$

$$\int \mathrm{tg}(\sqrt{x}).\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int \mathrm{tg}\,z.2\,dz=2\int \mathrm{tg}\,z\,dz=-2\ln|\cos z|+c=-2\ln|\cos\sqrt{z}|+c$$

1124 $\int x c\,\mathrm{tg}(x^2+1)dx$

Desarrollo

Sea $u = x^2 + 1 \Rightarrow x\,dx = \dfrac{du}{2}$

$$\int x c\operatorname{tg}(x^2+1)dx = \int c\operatorname{tg}(x^2+1)x\,dx = \int c\operatorname{tg} u.\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} u| + c = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}(x^2+1)| + c$$

1125 $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x.\cos x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x.\cos x} = \int \frac{\sec x}{\operatorname{sen} x}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}dx = \ln|\operatorname{tg} x| + c$$

1126 $\displaystyle\int \cos(\frac{x}{a}).\operatorname{sen}(\frac{x}{a})dx$

Desarrollo

$$\int \cos(\frac{x}{a}).\operatorname{sen}(\frac{x}{a})dx = \frac{a}{2}\operatorname{sen}^2(\frac{x}{a}) + c$$

1127 $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(6x).\cos(6x)dx$

Desarrollo

Sea u = sen 6x ⇒ du = 6 cos 6x dx

$$\int \operatorname{sen}^3(6x).\cos(6x)dx = \int u^3\frac{du}{6} = \frac{u^4}{24} + c = \frac{\operatorname{sen}^4(6x)}{24} + c$$

1128 $\displaystyle\int \frac{\cos(ax)}{\operatorname{sen}^5(ax)}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\cos(ax)}{\text{sen}^5(ax)}dx = \int (\text{sen}(ax))^{-5}.\cos(ax)dx = \int u^{-5}\frac{du}{a} = -\frac{1}{u^4 a} + c = -\frac{1}{a\,\text{sen}^4(ax)} + c$$

donde u = sen (ax) $\Rightarrow$ $\cos(ax)dx = \frac{du}{a}$

1129 $\int \frac{\text{sen}(3x)dx}{3+\cos(3x)}$

Desarrollo

Sea u = 3 + cos (3x) $\Rightarrow$ dz = - 3 sen (3x) dx $\Rightarrow$ $\text{sen}(3x)dx = -\frac{dz}{3}$

$$\int \frac{\text{sen}(3x)dx}{3+\cos(3x)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{3}\ln|z| + c = -\frac{1}{3}\ln|3+\cos(3x)| + c$$

1130 $\int \frac{\text{sen}\,x.\cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}}dx$

Desarrollo

Se conoce que: $\text{sen}\,x.\cos x = \frac{\text{sen}(2x)}{2}$ y $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos(2x)$

$$\int \frac{\text{sen}\,x.\cos x}{\sqrt{\cos^2 x.\text{sen}^2 x}} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}dx = \frac{1}{2}\int (\cos(2x))^{-\frac{1}{2}}\text{sen}(2x)dx$$

$$= -\frac{\sqrt{\cos(2x)}}{2} + c$$

1131 $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\text{sen}(2x)dx$

Desarrollo

Sea $u = 1+3\cos^2 x$ $\Rightarrow$ du = - 6 cos x . sen x dx

du = - 3 sen (2x)dx ; $-\frac{du}{3} = \text{sen}(2x)dx$

$$\int (1+3\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}.\text{sen}(2x)dx = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3} + c$$

1132 $\int \text{tg}^3(\frac{x}{3}).\sec^2(\frac{x}{3})dx$

Desarrollo

Sea $u = \text{tg}(\frac{x}{3}) \Rightarrow 3du = \sec^2(\frac{x}{3})dx$

$$\int \text{tg}^3(\frac{x}{3}).\sec^2(\frac{x}{3})dx = \int u^3 3du = \frac{3}{4}u^4 + c = \frac{3}{4}\text{tg}^4(\frac{x}{3}) + c$$

1133 $\int \sqrt{\text{tg}\, x}.\frac{dx}{\cos^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{\sqrt{\text{tg}\, x}}{\cos^2 x}dx = \int (\text{tg}\, x)^{\frac{1}{2}}.\sec^2 x\, dx = \frac{2}{3}\text{tg}^{\frac{3}{2}}(x) + c$$

1134 $\int \frac{c\,\text{tg}^{\frac{2}{3}}(x)}{\text{sen}^2(x)}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{c\,\text{tg}^{\frac{2}{3}}(x)}{\text{sen}^2(x)}dx = \int c\,\text{tg}^{\frac{2}{3}}(x).\csc^2(x)dx = -\frac{3}{5}c\,\text{tg}^{\frac{5}{3}}(x) + c$$

1135 $\int \frac{1+\text{sen}(3x)}{\cos^2(3x)}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{1+\operatorname{sen}(3x)}{\cos^2(3x)}dx = \int (\sec^2(3x) + \operatorname{tg}(3x).\sec(3x))dx = \frac{\operatorname{tg}(3x)}{3} + \frac{\sec(3x)}{3} + c$$

1136 $\int \frac{(\cos(ax)+\operatorname{sen}(ax))^2}{\operatorname{sen}(ax)}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{(\cos(ax)+\operatorname{sen}(ax))^2}{\operatorname{sen}(ax)}dx = \int \frac{1+2\operatorname{sen}(ax).\cos(ax)}{\operatorname{sen}(ax)}dx$$

$$\int (\csc(ax) + 2\cos(ax))dx = \frac{1}{a}(\ln|\csc(ax) - c\operatorname{tg}(ax)| + 2\operatorname{sen}(ax) + c$$

1137 $\int \frac{\csc^3(3x)}{b - ac\operatorname{tg}(3x)}dx$

Desarrollo

Sea $u = b - a\operatorname{ctg}(3x) \Rightarrow du = 3a\csc^2(3x)dx \Rightarrow \frac{du}{3a} = \csc^2(3x)dx$

$$\int \frac{\csc^2(3x)}{b - ac\operatorname{tg}(3x)}dx = \frac{1}{3a}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3a}\ln|u| + c = \frac{1}{3a}\ln|b - ac\operatorname{tg}(3x)| + c$$

1138 $\int (2\operatorname{senh}(5x) - 3\cosh(5x))dx$

Desarrollo

$$\int (2\operatorname{sen}(5x) - 3\cosh(5x))dx = \frac{2}{5}\cosh(5x) - \frac{3}{5}\operatorname{senh}(5x) + c$$

1139 $\int \operatorname{senh}^2 x\,dx$

Desarrollo

$$\int \text{senh}^2 x\,dx = \int (-\frac{1}{2}+\frac{\cosh(2x)}{2})dx = -\frac{x}{2}+\frac{\text{senh}(2x)}{4}+c$$

1140 $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{senh}(x)}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\text{senh}(x)} = \ln|\text{tgh}(\frac{x}{2})|+c$$

1141 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh(x)}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\cosh(x)} = \int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}dx = 2\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = 2\,\text{arctg}(e^x)+c$$

1142 $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{senh}(x).\cosh(x)}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\text{senh}(x).\cosh(x)} = \int \frac{\sec h(x)}{\text{senh}(x)}dx = \int \frac{\sec h^2(x)}{\text{tgh}(x)}dx = \ln|\text{tgh(x)}|+\text{c}$$

1143 $\displaystyle\int \text{tgh}(x)\,dx$

Desarrollo

$$\int \text{tgh}(x)dx = \int \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)}dx = \ln|\cosh(x)|+c$$

1144 $\displaystyle\int c\,\text{tgh}(x)dx$

Desarrollo

$$\int c\,\text{tgh}(x)dx = \int \frac{\cosh(x)}{\text{senh}(x)}dx = \ln|\text{senh}(x)| + c$$

Hallar las siguientes integrales indefinidas:

1145 $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

Desarrollo

$$\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx = \int (5-x^2)^{\frac{1}{5}}x\,dx = -\frac{1}{2}\int (5-x^2)^{\frac{1}{5}}(-2x)dx = -\frac{5}{12}\sqrt[5]{(5-x^2)^6} + c$$

1146 $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx$

Desarrollo

Sea $u = x^4 - 4x + 1 \Rightarrow \frac{du}{4} = (x^3-1)dx$

$$\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln|x^4-4x+1| + c$$

1147 $\int \frac{x^3dx}{x^8+5}$

Desarrollo

$$\int \frac{x^3dx}{x^8+5} = \int \frac{x^3dx}{(x^4)^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{4\sqrt{5}}\text{tg}(\frac{x^4}{\sqrt{5}}) + c$$

1148 $\int xe^{-x^2}dx$

Desarrollo

Sea $u = -x^2 \Rightarrow -\frac{du}{2} = x\,dx$

$$\int xe^{-x^2}dx=\int e^{-x^2}x\,dx=-\frac{1}{2}\int e^u du=-\frac{1}{2}e^u+c=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$$

1149 $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}dx=3\int \frac{dx}{2+3x^2}-\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}}$$

Usando las formulas 4 y 7, se tiene:

$$\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}dx=3\int \frac{dx}{2+3x^2}-\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{\frac{3}{2}})-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{2+3x^2}|+c$$

1150 $\int \frac{x^3-1}{x+1}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x^3-1}{x+1}dx=\int (x^2-x+1-\frac{2}{x+1})dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|+c$$

1151 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

Desarrollo

Sea $z^2=e^x \Rightarrow 2z\,dz=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{2z}{e^x}dz=\frac{2z}{z^2}dz \Rightarrow dx=\frac{2}{z}dz$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}=\int \frac{1}{z}.\frac{2\,dz}{z}=2\int \frac{dz}{z^2}=-\frac{2}{z}+c=-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+c$$

1152 $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x} dx$

Desarrollo

Sea $z = x + \cos x \Rightarrow dz = (1 - \operatorname{sen} x)dx$

$$\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x} dx = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln|x+\cos x| + c$$

1153 $\int \frac{\operatorname{tg}(3x) - c\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(3x)} dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\operatorname{tg}(3x) - c\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(3x)} dx = \int (\sec(3x) - c\operatorname{tg}(3x)\csc(3x))dx$$

$$= \frac{1}{3}[\ln|\sec(3x) + \operatorname{tg}(3x)| + \frac{1}{\operatorname{sen}(3x)}] + c$$

1154 $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int (\ln x)^{-2}.\frac{dx}{x} = \int u^{-2} du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\ln(x)} + c$$

donde $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

1155 $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 2}}$

Desarrollo

Sea $u = \operatorname{tg} x \Rightarrow du = \sec^2 x\, dx$

$$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 2}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-2}} = \ln|u + \sqrt{u^2-2}| + c = \ln|\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 2}| + c$$

1156 $\int (2+\frac{x}{2x^2+1})\frac{dx}{2x^2+1}$

Desarrollo

$$\int (2+\frac{x}{2x^2+1})\frac{dx}{2x^2+1} = 2\int \frac{dx}{2x^2+1}+\int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)^2}$$

$$= \sqrt{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2})-\frac{1}{4(2x^2+1)}+c$$

1157 $\int a^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$

Desarrollo

Sea $u = a^{\operatorname{sen} x} \Rightarrow du = a^{\operatorname{sen} x}\cos x.\ln a\,dx \Rightarrow \frac{du}{\ln a} = a^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$

$$\int a^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \int \frac{du}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}u + c = \frac{a^{\operatorname{sen} x}}{\ln a}+c$$

1158 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

Desarrollo

Sea $u = x^3+1 \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2 dx$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \int (x^3+1)^{-\frac{1}{3}}x^2 dx = \int u^{-\frac{1}{3}}\frac{du}{3} = \frac{1}{2}u^{\frac{2}{3}}+c = \frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{2}+c$$

1159 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Desarrollo

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x^2)+c$$

1160 $\int \operatorname{tg}^2(ax)dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{tg}^2(ax)dx = \int (\sec^2(ax)-1)dx = \frac{\operatorname{tg}(ax)}{a} - x + c$$

1161 $\int \operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})dx$

Desarrollo

Por la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ se tiene:

$$\int \operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})dx = \int \frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x}{2} + c$$

1162 $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}$

Desarrollo

$$\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}} = \operatorname{arcsen}(\frac{\operatorname{tg} x}{2}) + c$$

1163 $\int \frac{dx}{\cos(\frac{x}{a})}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\cos(\frac{x}{a})} = a\ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2a}+\frac{\pi}{4})|+c$$

1164 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

Desarrollo

Sea $u = 1 + \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\int \sqrt[3]{1+\ln x}\frac{dx}{x} = \int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}(1+\ln x)^{\frac{4}{3}} + c$$

1165 $\int \operatorname{tg}(\sqrt{x-1}).\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

Desarrollo

Sea $z = \sqrt{x-1} \Rightarrow dz = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2dz = \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

$$\int \operatorname{tg}(\sqrt{x-1}).\frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\int \operatorname{tg} z\,dz = -2\ln(\cos z) + c = -2\ln|\cos\sqrt{x-1}| + c$$

1166 $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}(x^2)}$

Desarrollo

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}(\frac{x^2}{2})| + c = \frac{1}{2}\ln(\csc(x^2) - c\operatorname{tg}(x^2)) + c$$

1167 $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2}dx = \int (\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} + \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{\ln^2(1+x^2)}{4} + \operatorname{arctg} x + c$$

1168 $\int \frac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + \cos x} dx$

Desarrollo

Sea $u = \text{sen } x + \cos x \Rightarrow du = (\cos x - \text{sen } x)\, dx \Rightarrow -du = (\text{sen } x - \cos x)dx$

$$\int \frac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + \cos x} dx = \int -\frac{du}{u} = -\ln u + c = -\ln|\text{sen } x + \cos x| + c$$

1169 $\int \frac{(1-\text{sen}(\frac{x}{\sqrt{2}}))^2}{\text{sen}(\frac{x}{\sqrt{2}})} dx$

Desarrollo

$$\int \frac{(1-\text{sen}(\frac{x}{\sqrt{2}}))^2}{\text{sen}(\frac{x}{\sqrt{2}})} = \int (\frac{1}{\text{sen}(\frac{x}{\sqrt{2}})} - 2 + \text{sen}(\frac{x}{\sqrt{2}}))dx$$

$$= \sqrt{2}\ln|\text{tg}(\frac{x}{2\sqrt{2}})| - 2x - \sqrt{2}\cos(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c$$

1170 $\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 2}$

Desarrollo

$$\int \frac{x^2}{x^2-2} dx = \int (1 + \frac{2}{x^2-2})dx = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + c$$

1171 $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$

Desarrollo

$$\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx = \int (\frac{2x}{x(1+x^2)} + \frac{1+x^2}{x(1+x^2)})dx = \int (\frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{x})dx = 2\,\text{arctg}\, x + \ln x + c$$

1172 $\int e^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen} 2x\,dx$

Desarrollo

Sea $u=\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow$ du = 2 sen x . cos x dx = sen 2x dx

$$\int e^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen} 2x\,dx=\int e^u\,du=e^u+c=e^{\operatorname{sen}^2 x}+c$$

1173 $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx=5\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}-3\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-3x^2}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{3}x}{2})+\sqrt{4-3x^2}+c$$

1174 $\int \frac{dx}{e^x+1}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\ln|1+e^{-x}|+c=-[\ln(1+e^x)-\ln e^x]+c$$

$$=-[\ln|1+e^x|-x]+c=x-\ln|1+e^x|+c$$

1175 $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}=\frac{1}{a-b}\int\frac{dx}{\frac{a+b}{a-b}+x^2}=\frac{1}{a-b}.\frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}=arctg(\frac{t}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}})+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}})+c$$

1176 $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-2}} = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x)^2-2}} = \ln|e^x+\sqrt{e^{2x}-2}|+c$$

1177 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(ax).\cos(ax)}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(ax).\cos(ax)} = \int \frac{\sec(ax)}{\operatorname{sen}(ax)}dx = \int \frac{\sec^2(ax)\,dx}{\operatorname{tg}(ax)} = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{tg}(ax)|+c$$

1178 $\int \operatorname{sen}(\frac{2\pi t}{T}+\psi_0)dt$

Desarrollo

Sea $u=\frac{2\pi t}{T}+\psi_0 \Rightarrow du=\frac{2\pi}{T}dt \Rightarrow dt=T\frac{du}{2\pi}$

$$\int \operatorname{sen}(\frac{2\pi t}{T}+\psi_0)dt = \int \operatorname{sen} u.T\frac{du}{2\pi} = \frac{T}{2\pi}\int \operatorname{sen} u\,du$$

$$= -T\frac{\cos u}{2\pi}+c = -\frac{T}{2\pi}\cos(\frac{2\pi t}{T}+\psi_0)+c$$

1179 $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$

Desarrollo

Sea $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$

$$\int\frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}=\int\frac{du}{4-u^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|+c$$

1180 $\displaystyle\int\frac{\arccos(\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Desarrollo

Sea $u=\arccos(\frac{x}{2}) \Rightarrow du=-\dfrac{\frac{dx}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \Rightarrow du=-\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$$\int\frac{\arccos(\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\int u\,du=-\frac{u^2}{2}+c=-\frac{1}{2}(\arccos(\frac{x}{2}))^2+c$$

1181 $\displaystyle\int e^{-\operatorname{tg}x}\sec^2 x\,dx$

Desarrollo

Sea u = - tg x $\Rightarrow du=-\sec^2 x\,dx$

$$\int e^{-\operatorname{tg}x}.\sec^2 x\,dx=-\int e^u du=-e^u+c=-e^{-\operatorname{tg}x}+c$$

1182 $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}x.\cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}dx$

Desarrollo

$$\int\frac{\operatorname{sen}x.\cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{2}})+c$$

1183 $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x}$

Desarrollo

$$\operatorname{sen} x.\cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x} = 4\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(2x)} = 4\int \csc^2(2x)dx = -2c\operatorname{tg}(2x) + c$$

1184 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Desarrollo

$$\int \left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{2}\right)^2 - \sqrt{1-x^2} + c$$

1185 $\displaystyle\int \frac{\sec x.\operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\sec x.\operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}}dx = \int \frac{\sec x.\operatorname{tg} x}{\sqrt{(\sec x)^2 + 1}}dx = \ln|\sec x + \sqrt{\sec^2 x + 1}| + c$$

1186 $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)}{4+\cos^2(2x)}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\cos(2x)dx}{4+\cos^2(2x)} = \int \frac{\cos(2x)}{4+1-\operatorname{sen}^2(2x)}dx = \int \frac{\cos(2x)dx}{5-\operatorname{sen}^2(2x)} = \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{5}-\operatorname{sen}(2x)}\right| + c$$

1187 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

1188 $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}dx$

Desarrollo

Sea $u=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}dx=\int(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))^3}+c$$

1189 $\int x^2\cosh(x^3+3)dx$

Desarrollo

Sea $u=x^3+3 \Rightarrow \frac{du}{3}=x^2dx$

$$\int x^2\cosh(x^3+3)dx=\int\cosh(u)\frac{du}{3}=\frac{\operatorname{senh}(u)}{3}+c=\frac{\operatorname{senh}(x^3+3)}{3}+c$$

1190 $\int\frac{3^{\operatorname{tgh}(x)}}{\cosh^2(x)}dx$

Desarrollo

Sea u = tgh x $\Rightarrow du=\sec h^2(x)dx$

$$\int\frac{3^{\operatorname{tgh}(x)}}{\cosh^2(x)}dx=\int 3^{\operatorname{tgh}x}.\sec hx^2dx=\int 3^u du=\frac{3^u}{\ln 3}+c=\frac{3^{\operatorname{tgh}x}}{\ln 3}+c$$

4.3. METODO DE SUSTITUCIÓN.-

PRIMERO.- SUSTITUCION O CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRACION INDEFINIDA.

Se hace poniendo $x = \psi(t)$, donde t es una variable y ψ es una función continua diferenciable,

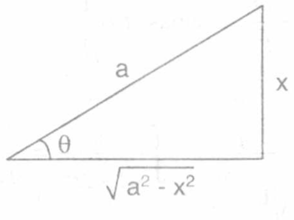
$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\psi(t)).\psi'(t)dt} \qquad \textbf{... (1)}$$

La función ψ se procura elegir de tal manera que el segundo miembro de (1) tome una forma más adecuada para la integración.

SEGUNDO.- SUSTITUCION TRIGONOMETRICA

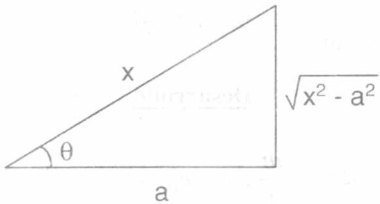
1 Si la integral contiene el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$ se toma: $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a}$; $x = a \operatorname{sen}\theta$

$dx = a\cos\theta\, d\theta \Rightarrow \theta = \operatorname{arcsen}(\frac{x}{a})$



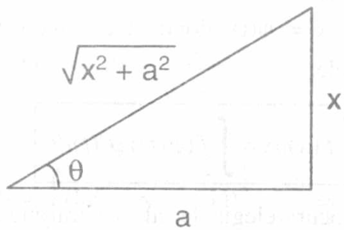
2 Si la integral contiene el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$ se toma: $\sec\theta = \frac{x}{a}$; $x = a\sec\theta$

$dx = a\sec\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta$; $\theta = arc\sec(\frac{x}{a})$



3 Si la integral contiene el radical $\sqrt{a^2+x^2}$ se toma: $\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{a}$

x = a tg θ ; $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$; $\theta = \operatorname{arctg}(\frac{x}{a})$



1191 Hallar las siguientes integrales, utilizando para ello las sustituciones indicadas.

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $x = \frac{1}{t}$

Desarrollo

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2} \quad \text{además} \quad t = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{1-\frac{2t^2}{t^2}}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{1-2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arccos(\sqrt{2}t)+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arccos(\frac{\sqrt{2}}{x})+c, \quad x > \sqrt{2}$$

b) $\int \frac{dx}{e^x+1}$, x = - ln t

Desarrollo

$$x = -\ln t \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t}, \quad t = e^{-x}$$

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{-\frac{dt}{t}}{e^{-\ln t}+1}=-\int\frac{dt}{1+t}=-\ln|1+t|+c=-\ln|1+e^{-x}|+c$$

c) $\int x(5x^2-3)^7\,dx\,,\;\; 5x^2-3=t$

Desarrollo

$$5x^2-3=t \;\Rightarrow\; x\,dx=\frac{dt}{10}$$

$$\int x(5x^2-3)^7\,dx=\int t^7\frac{dt}{10}=\frac{t^8}{80}+c=\frac{(5x^2-3)^8}{80}+c$$

d) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}\,,\;\; t=\sqrt{x+1}$

Desarrollo

$$t=\sqrt{x+1} \;\Rightarrow\; dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}\,;\;\; t=\sqrt{x+1} \;\Rightarrow\; x=t^2-1$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}=2\int(t^2-1)dt=2\frac{t^3}{3}-2t+c=2\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}-2\sqrt{x+1}+c$$

e) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,,\;\; t=\operatorname{sen} x$

Desarrollo

$$t=\operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; dt=\cos x\,dx$$

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\ln|t+\sqrt{1+t^2}|+c=\ln|\operatorname{sen} x+\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}|+c$$

Hallar las integrales siguientes, empleando para ello las sustituciones mas adecuadas.

1192 $\int x(2x+5)^{10}dx$

Desarrollo

$t = 2x + 5 \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx\ ,\quad x = \frac{t-5}{2}$

$$\int x(2x+5)^{10}dx = \int \frac{t-5}{2}.t^{10}.\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int (t^{11} - 5t^{10})dt = \frac{1}{4}[\frac{t^{12}}{12} - \frac{5}{11}t^{11}] + c$$

$$= \frac{1}{4}[\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5}{11}(2x+5)^{11}] + c$$

1193 $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$

Desarrollo

Sea $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+t^2}{1+t}.2t\,dt = 2\int \frac{t^3+t}{t+1}dt$$

$$2\int (t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1})dt = 2[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|t+1|] + c$$

$$= 2[\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}|] + c$$

1194 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$

Desarrollo

Sea $t=\sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2=2x+1$; $x=\dfrac{t^2-1}{2} \Rightarrow$ dx = t dt

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}=\int\frac{t\,dt}{\frac{t^2-1}{2}.t}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}\right|+c$$

1195 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

Desarrollo

Sea $t=\sqrt{e^x-1} \Rightarrow t^2=e^x-1 \Rightarrow e^x=t^2+1$

$$e^x dx=2t\,dt \Rightarrow dx=\frac{2t\,dt}{t^2+1}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{\frac{2t\,dt}{t^2+1}}{t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg} t+c=2\operatorname{arctg}(\sqrt{e^x-1})+c$$

1196 $\displaystyle\int\frac{\ln(2x)}{\ln(4x)}.\frac{dx}{x}$

Desarrollo

ln(2x) = ln x + ln 2 ; ln(4x) = ln x + ln 4 = ln x + 2 ln 2

$$\int\frac{\ln(2x)}{\ln(4x)}.\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{\ln x+\ln 2}{\ln x+2\ln 2}\right).\frac{dx}{x}=\int\left(1-\frac{\ln 2}{\ln x+2\ln 2}\right).\frac{dx}{x}$$

$$=\ln x-(\ln 2)\ln|\ln x+2\ln 2|+c$$

1197 $\displaystyle\int\frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Desarrollo

Sea $t = \text{arcsen } x \;\Rightarrow\; dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{(\text{arcsen } x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{(\text{arcsen } x)^3}{3} + c$$

1198 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$

Desarrollo

Sea $t^2 = e^x + 1 \;\Rightarrow\; e^x = t^2 - 1 \;\Rightarrow\; e^x dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{t^2-1}{t}.2t\,dt = 2(\frac{t^3}{3} - t) + c = \frac{2}{3}t(t^2-3) + c = \frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}(e^x-2) + c$$

1199 $\displaystyle\int \frac{\text{sen}^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$

Desarrollo

Sea $t^2 = \cos x \;\Rightarrow\;$ 2t dt = - sen x dx ; como $t^2 = \cos x$

$\Rightarrow\; t^4 = \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x\,;\;\; \text{sen}^2 x = 1 - t^4$

$$\int \frac{\text{sen}^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}} = \int \frac{1-t^4}{t}.(-2t)dt = -2\int (1-t^4)dt = -2(t - \frac{t^5}{5}) + c = \frac{2}{5}t(t^4-5) + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{\cos x}(\cos^2 x - 5) + c$$

1200 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Desarrollo

Sea $t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

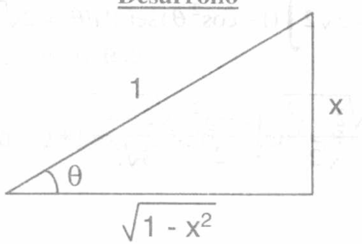
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{t.\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=-\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+c$$

$$=-\ln|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}|+c=-\ln|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}|+c=\ln|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}|+c$$

Hallar las siguientes integrales, empleando sustituciones trigonométricas.

1201 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Desarrollo



$\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$; sen θ = x ⇒ dx = cos θ dθ

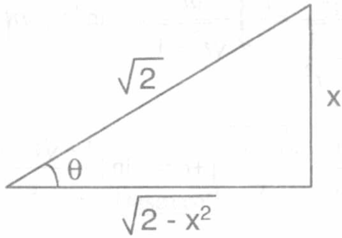
$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\operatorname{sen}^2\theta.\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=\int\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=\int\frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta$$

$$=\frac{\theta}{2}-\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}+c=\frac{\operatorname{arcsen}x}{2}-x\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}+c$$

1202 $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}}$

Desarrollo

$\sqrt{2}\cos\theta = \sqrt{2-x^2}$; $x = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow dx = \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$



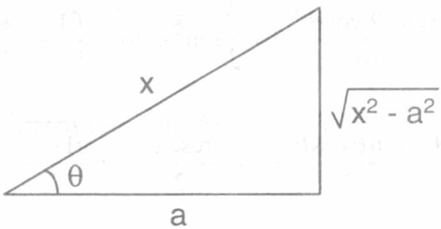
$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}} = \int \frac{2\sqrt{2}\,\text{sen}^3\theta.\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}$$

$$2\sqrt{2}\int \text{sen}^3\theta\, d\theta = 2\sqrt{2}\int (1-\cos^2\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta = 2\sqrt{2}(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}) + c$$

$$= 2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}} + \frac{2-x^2}{2}.\frac{\sqrt{2-x^2}}{3\sqrt{2}}) + c = -\frac{x^2}{3}\sqrt{2-x^2} - \frac{4}{3}\sqrt{2-x^2} + c$$

1203 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$

Desarrollo



$a.\text{tg}\,\theta = \sqrt{x^2-a^2}$; $x = a \sec\theta \Rightarrow dx = a\sec\theta\,.\,\text{tg}\,\theta\, d\theta$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\int\frac{a\,\text{tg}\,\theta.a\sec\theta.\text{tg}\,\theta\,d\theta}{a\sec\theta}=a\int\text{tg}^2\,\theta\,d\theta$$

$$=a\int(\sec^2\theta-1)d\theta=a\,\text{tg}\,\theta-a\theta+c=\sqrt{x^2-a^2}-a.arc\sec(\frac{x}{a})+c$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a.\arccos(\frac{a}{x})+c$$

1204 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Desarrollo

$$c\,\text{tg}\,\theta=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\quad;\quad\cos\theta=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad\theta=\arccos\frac{1}{x}$$

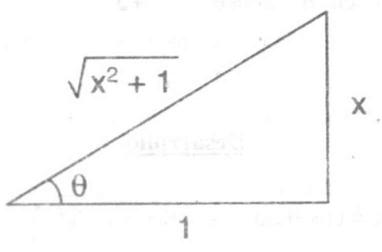
$x=\sec\theta\ \Rightarrow\ dx=\sec\theta\,.\,\text{tg}\,\theta\,d\theta$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\cos\theta.c\,\text{tg}\,\theta.\sec\theta.\text{tg}\,\theta\,d\theta=\int d\theta=\theta+c=\arccos(\frac{1}{x})+c$$

1205 $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$

Desarrollo

$\text{tg}\,\theta=x\ \Rightarrow\ dx=\sec^2\theta\,d\theta\ ;\ \sec\theta=\sqrt{x^2+1}$



$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \int \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta}.\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta(1+\operatorname{tg}^2\theta)d\theta}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$\int (\sec\theta.c\operatorname{tg}\theta + \sec\theta.\operatorname{tg}\theta)d\theta = \int (\csc\theta + \sec\theta.\operatorname{tg}\theta)d\theta$$

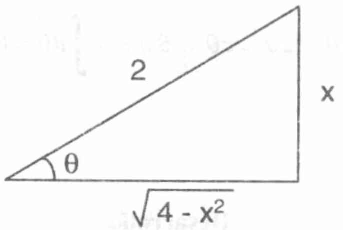
$$= \ln|\csc\theta - c\operatorname{tg}\theta| + \sec\theta + c = \ln\left|\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right| + \sec\theta + c$$

$$= -\ln\left|\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right| + \sec\theta + c = \sqrt{x^2+1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + c$$

1206 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Desarrollo

$x = 2\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = 2\cos\theta\, d\theta$; $\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$

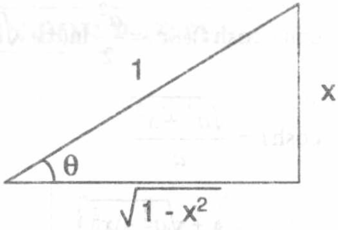


$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta}{4\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\, d\theta = -\frac{c\operatorname{tg}\theta}{4} + c = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c$$

1207 $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Desarrollo

$x = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$; $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$



$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos\theta.\cos\theta\, d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta.\cos\theta}{2} + c = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

1208 Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ valiéndose de la sustitución $x = \operatorname{sen}^2 t$.

Desarrollo

Sea $x = \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow$ dx = 2 sen t. cos t dt,

como $x = \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow \operatorname{sen} t = \sqrt{x} \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{2\operatorname{sen} t.\cos t\, dt}{\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} = 2\int \frac{\operatorname{sen} t.\cos t\, dt}{\operatorname{sen} t.\cos t} = 2t + c = 2\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + c$$

1209 $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

Desarrollo

Empleando la sustitución hiperbólica x = a senh t tenemos:

$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\operatorname{sen}^2 ht} = a\cosh t$; dx = a cosh t. dt

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = a^2\int \cosh^2 t\, dt = a^2\int \frac{1+\cosh 2t}{2}\, dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{\operatorname{senh} 2t}{2}) + c$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \operatorname{senh} t.\cosh t) + c = \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + c$$

donde, $\operatorname{senh} t = \frac{x}{a}$, $\cosh t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$

$$e^t = \cosh t + \operatorname{senh} t = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

1210 Hallar $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; haciendo x = a cosh t

Desarrollo

x = a cosh t $\Rightarrow$ dx = a senh t. dt

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a^2 \cosh^2 t.\operatorname{senh} t\, dt}{\operatorname{senh} t} = a^2 \int \cosh^2 t\, dt$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cosh 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}[t + \frac{\operatorname{senh} 2t}{2}] + c = \frac{a^2}{2}[t + \operatorname{senh} t.\cosh t] + c$$

como x = a cosh t $\Rightarrow$ $\cosh t = \frac{x}{a}$, además

$$\operatorname{senh} t = \sqrt{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

$$e^t = \operatorname{senh} t + \cosh t = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \Rightarrow t = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right|$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2}{2}[\ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right| + \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2}] + c$$

$$= \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + k$$

4.4. INTEGRACION POR PARTES.-

Fórmula para la integración por partes: si $u = \psi(x)$ y $v = \varphi(x)$; son funciones diferenciables, tendremos que:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Hallar las siguientes integrales, utilizando la fórmula para la integración por partes.

1211 $\int \ln x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x.\ln x - x + c$$

1212 $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{(1+x^2)} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x.\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

1213 $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\int \operatorname{arcsen} x\,dx = x.\operatorname{arcsen} x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

1214 $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos 3x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3} \end{cases}$

$$\int x \cos 3x\,dx = \frac{x \operatorname{sen} 3x}{3} - \int \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} dx = \frac{x \operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c$$

1216 $\int \frac{x}{e^x} dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{e^x} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{e^x} \end{cases}$

$$\int \frac{x\,dx}{e^x} = -\frac{x}{e^x} - \int -\frac{dx}{e^x} = -\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + c = -\frac{x+1}{e^x} + c$$

1217 $\int x.2^{-x} dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = 2^{-x} dx \Rightarrow v = -\dfrac{2^{-x}}{\ln 2} \end{cases}$

$$\int x.2^{-x}dx = -x.\frac{2^{-x}}{\ln 2} - \int -\frac{2^{-x}}{\ln 2}dx = -x.\frac{2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln^2 2} + c = -\frac{x\ln 2 + 1}{2^x \ln^2 2} + c$$

1218 $\int x^2 e^{3x} dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{cases}$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{cases}$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}[\frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx] = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{2x}{9}e^{3x} + \frac{2e^{3x}}{27} + c$$

$$= \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + c$$

1219 $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = x^2 - 2x + 5 \Rightarrow du = 2(x-1)dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$

$$\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) - \int 2(x-1)(-e^{-x})dx$$

$$= -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) + 2\int (x-1)e^{-x}dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = x-1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$

$$\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2-2x+5)+2(x-1)(-e^{-x})-2e^{x}+c$$

$$= -e^{-x}(x^2+5)+c$$

1220 $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx \\ dv = e^{-\frac{x}{3}}dx \Rightarrow v = -3e^{-\frac{x}{3}} \end{cases}$

$$\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}dx = -3x^3e^{-\frac{x}{3}} - \int (3x^2)(-3e^{-\frac{x}{3}})dx = -3x^3e^{-\frac{x}{3}} + 9\int x^2 e^{-\frac{x}{3}}dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{-\frac{x}{3}}dx \Rightarrow v = -3e^{-\frac{x}{3}} \end{cases}$

$$\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}dx = -3x^3e^{-\frac{x}{3}} + 9[-3x^2e^{-\frac{x}{3}} + 6\int xe^{-\frac{x}{3}}dx] = -3x^2e^{-\frac{x}{3}}(x+3)+54\int xe^{-\frac{x}{3}}dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-\frac{x}{3}}dx \Rightarrow v = -3e^{-\frac{x}{3}} \end{cases}$

$$\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}dx = -3x^2e^{-\frac{x}{3}}(x+3)+54(-3xe^{-\frac{x}{3}}-9e^{-\frac{x}{3}})+c$$

$$= -3x^2e^{-\frac{x}{3}}(x+3)-54e^{-\frac{x}{3}}(3x+9)+c = -e^{-\frac{x}{3}}(3x^3+9x^2+162x+486)+c$$

$$= -3e^{-\frac{x}{3}}(x^3+3x^2+54x+162)+c$$

1221 $\int x \operatorname{sen} x . \cos x \, dx$

Desarrollo

Usar la identidad sen 2x = 2 sen x. cos x

$$\int x \operatorname{sen} x . \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int x \operatorname{sen} 2x \, dx$$

$$\text{Haciendo } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} 2x \, dx \Rightarrow v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$$

$$\int x \operatorname{sen} x . \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int x \operatorname{sen}(2x) dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right) + c$$

$$= -\frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} + c$$

1222 $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x \, dx$

Desarrollo

$$\text{Haciendo } \begin{cases} u = x^2 + 5x + 6 \Rightarrow du = (2x+5)dx \\ dv = \cos 2x \, dx \Rightarrow v = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} \end{cases}$$

$$\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x \, dx = \frac{x^2 + 5x + 6}{2}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\int (2x+5) \operatorname{sen} 2x \, dx$$

$$\text{Haciendo } \begin{cases} u = 2x + 5 \Rightarrow du = 2\,dx \\ dv = \operatorname{sen} 2x \, dx \Rightarrow v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$$

$$\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx = \frac{x^2+5x+6}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\left(-\frac{2x+5}{2}\cos 2x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{2x^2+10x+11}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{2x+5}{4}\cos 2x + c$$

1223 $\int x^2 \ln x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

1224 $\int \ln^2 x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2\ln x.\dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\int \ln^2 x.dx = x\ln^2 x - \int x.2\ln x.\frac{dx}{x} = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\int \ln^2 x.dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c$$

1225 $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^3} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{cases}$

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}.\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c$$

1226 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow v = 2\sqrt{x} \end{cases}$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}.\frac{dx}{x} = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \sqrt{x}\frac{dx}{x} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c$$

1227 $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1-x^2})dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + c = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + c$$

1228 $\int x \operatorname{arcsen} x\, dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int x \operatorname{arcsen} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sea $x = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2\theta.\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} = \int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} = \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2} = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

Luego: $\int x \operatorname{arcsen} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}(\frac{\operatorname{arcsen} x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}) + c$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{\operatorname{arcsen} x}{4} + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + c$$

1229 $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c$$

1230 $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int x \cos ec^2 x\,dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos ec^2 x\,dx \Rightarrow v = -c\operatorname{tg} x \end{cases}$

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -c\operatorname{tg} x + \int c\operatorname{tg} x\,dx = xc\operatorname{tg} x + \ln|\operatorname{sen} x| + c$$

1231 $\int \frac{x\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = \int x.\cos ecx.c\operatorname{tg} x\,dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos ecx.c\operatorname{tg} x\,dx \Rightarrow v = -\cos ec\,x \end{cases}$

$$\int \frac{x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = -\cos ecx - \int -\cos ecx\,dx$$

$$= -x\cos ecx + \ln|\cos ecx - c\operatorname{tg} x| + c = -\frac{x}{\operatorname{sen} x} + \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + c$$

1232 $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x\,dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x\,dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - (e^x \cos x - \int e^x(-\operatorname{sen} x)dx)$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + c$$

1233 $\int 3^x \cos x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x\,dx \\ dv = 3^x dx \Rightarrow v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{cases}$

$$\int 3^x \cos x\,dx = \frac{3^x \cos x}{\ln 3} - \int -\frac{3^x}{\ln 3}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{3^x \cos x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\int 3^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x\,dx \\ dv = 3^x dx \Rightarrow v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{cases}$

$$\int 3^x \cos x\,dx = \frac{3^x \cos x}{\ln 3} + \frac{3^x \operatorname{sen} x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln^2 3}\int 3^x \cos x\,dx$$

$$\int 3^x \cos x\,dx = \frac{3^x(\operatorname{sen} x + \ln 3 \cos x)}{\ln^2 3 + 1} + c$$

1234 $\int e^{ax}\,\text{sen}(bx)dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u=\text{sen}(bx) \Rightarrow du=b\cos(bx)dx \\ dv=e^{ax}dx \Rightarrow v=\dfrac{e^{ax}}{a} \end{cases}$

$$\int e^{ax}\,\text{sen}(bx)dx=\frac{e^{ax}}{a}\text{sen}\,bx-\int b\frac{e^{ax}}{a}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}\,\text{sen}\,bx}{a}-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

Haciendo $\begin{cases} u=\cos bx \Rightarrow du=-b\,\text{sen}\,bx\,dx \\ dv=e^{ax}dx \Rightarrow v=\dfrac{e^{ax}}{a} \end{cases}$

$$\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx=\frac{e^{ax}\,\text{sen}\,bx}{a}-\frac{b}{a}\left(\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx\right)$$

$$=\frac{e^{ax}\,\text{sen}\,bx}{a}-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx=\frac{ae^{ax}\,\text{sen}\,bx-be^{ax}\cos bx}{a^2}$$

$$\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx=e^{ax}\left(\frac{a\,\text{sen}\,bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\right)+c$$

1235 $\int \text{sen}(\ln x)dx$

Desarrollo

Sea $z=\ln x \Rightarrow x=e^{z} \Rightarrow dx=e^{z}dz$

$$\int \text{sen}(\ln x)dx = \int e^z \,\text{sen}\, z\,dz = \frac{e^z \,\text{sen}\, z - e^z \cos z}{2} + c\,,\quad \text{por el ejercicio 1234.}$$

$$\int \text{sen}(\ln x)dx = \frac{e^{\ln x}\,\text{sen}(\ln x) - e^{\ln x}\cos(\ln x)}{2} + c = \frac{x\,\text{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x)}{2} + c$$

Hallar las siguientes integrales, empleando diferentes procedimientos:

1236 $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = xe^{-x^2}dx \Rightarrow v = -\dfrac{e^{-x^2}}{2} \end{cases}$

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \int -xe^{-x^2}\,dx = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \frac{e^{-x^2}}{2} + c = -\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1) + c$$

1237 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

Desarrollo

Sea $z^2 = x \Rightarrow$ dx = 2z dz

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int ze^z dz$$

Haciendo $\begin{cases} u = z \Rightarrow du = dz \\ dv = e^z dz \Rightarrow v = e^z \end{cases}$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int ze^z dz = 2(ze^z - e^z) + c = 2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + c = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$$

1238 $\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=(x^2-2x+3)dx \Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3}-x^2+3x \end{cases}$

$$\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx=(\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\ln x-\int(\frac{x^2}{3}-x+3)dx$$

$$=(\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+c$$

1239 $\int x\ln(\frac{1-x}{1+x})dx$

Desarrollo

$$\int x\ln(\frac{1-x}{1+x})dx=\int x\ln(1-x)dx-\int x\ln(1+x)dx \qquad \text{... (1)}$$

integrando $\int x\ln(1-x)dx$

Haciendo $\begin{cases} u=\ln(1-x) \Rightarrow du=-\dfrac{dx}{1-x} \\ dv=x\,dx \Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int x\ln(1-x)dx=\frac{x^2}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1-x}dx=\frac{x^2}{2}\ln(1-x)+[\frac{1}{2}\int(-x-1+\frac{1}{1-x})dx]$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1-x)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1-x) \qquad \text{... (2)}$$

integrando $\int x\ln(1+x)dx$

Haciendo $\begin{cases} u=\ln(1+x) \Rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x} \\ dv=x\,dx \Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int x\ln(1+x)dx=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x}dx=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int(x-1+\frac{1}{1+x})dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x) \qquad \textbf{... (3)}$$

reemplazando: (2), (3) en (1) se tiene:

$$\int x\ln(\frac{1-x}{1+x})dx=\frac{x^2}{2}\ln(1-x)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1-x)-\frac{x^2}{2}\ln(1+x)+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+x)$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}-x-\frac{1}{2}\ln(\frac{1-x}{1+x})+c=\frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-x+c$$

1240 $\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$

<u>Desarrollo</u>

Haciendo $\begin{cases} u=\ln^2 x \Rightarrow du=2\ln x.\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow v=-\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx=-\frac{\ln^2 x}{x}+2\int\ln x.\frac{dx}{x^2}$$

Haciendo $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2}) = -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} + c$$

1241 $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \ln(\ln x) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x \ln x} \\ dv = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow v = \ln x \end{cases}$

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x . \ln(\ln x) - \int \ln x . \frac{dx}{x \ln x} = \ln x . \ln(\ln x) - \ln x + c$$

$$= (\ln(\ln x) - 1) \ln x + c$$

1242 $\int x^2 \operatorname{arctg}(3x) dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \operatorname{arctg}(3x) \Rightarrow du = \dfrac{3dx}{1+9x^2} \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\int x^2 \operatorname{arctg}(3x) dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg}(3x) - \int \frac{x^3 dx}{1+9x^2} = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg}(3x) - \int (\frac{x}{9} - \frac{1}{162} . \frac{18x}{1+9x^2}) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg}(3x) - \frac{x^2}{18} + \frac{1}{162} \ln|1+9x^2| + c$$

1243 $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$

Desarrollo

Sea $z = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} z \Rightarrow dx = \sec^2 z\,dz$

$$\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \int z^2 \operatorname{tg} z.\sec^2 z\,dz$$

Haciendo $\begin{cases} u = z^2 \Rightarrow du = 2z\,dz \\ dv = \operatorname{tg} z.\sec^2 z\,dz \Rightarrow v = \dfrac{\operatorname{tg}^2 z}{2} \end{cases}$

$$\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \frac{z^2}{2}\operatorname{tg}^2 z - \int z\operatorname{tg}^2 z\,dz = \frac{z^2}{2}\operatorname{tg}^2 z - \int (z\sec^2 z - z)dz$$

$$= \frac{z^2}{2}\operatorname{tg}^2 z + \frac{z^2}{2} - \int z\sec^2 z\,dz$$

integrando $\int z\sec^2 z\,dz = z\operatorname{tg} z + \ln|\cos z|$ es por partes

$$\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \frac{z^2}{2}(\operatorname{tg}^2 z + 1) - z\operatorname{tg} z - \ln|\cos z| + c$$

$$= \frac{z^2}{2}(\operatorname{tg}^2 z + 1) - z\operatorname{tg} z + \ln|\sec z| + c$$

$$= \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2}(x^2 + 1) - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$$

1244 $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

Desarrollo

Sea $z = \text{arcsen } x \Rightarrow x = \text{sen } z$, $dx = \cos z\, dz$

$$\int (\text{arcsen } x)^2 dx = \int z^2 \cos z\, dz$$

Haciendo $\begin{cases} u = z^2 \Rightarrow du = 2z\, dz \\ dv = \cos z\, dz \Rightarrow v = \text{sen } z \end{cases}$

$$\int (\text{arcsen } x)^2 dx = z^2 \text{sen } z - 2\int z \text{ sen } z\, dz$$

Haciendo $\begin{cases} u = z \Rightarrow du = dz \\ dv = \text{sen } z\, dz \Rightarrow v = -\cos z \end{cases}$

$$\int (\text{arcsen } x)^2 dx = z^2 \text{sen } z - 2(-z\cos z - \int -\cos z\, dz)$$

$$= z^2 \text{ sen } z + 2z\cos z - 2 \text{ sen } z + c = x(\text{arcsen } x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \text{ arcsen } x - 2x + c$$

1245 $\displaystyle\int \frac{\text{arcsen } x}{x^2} dx$

Desarrollo

Sea $z = \text{arcsen } x \Rightarrow x = \text{sen } z$, $dx = \cos z\, dz$

$$\int \frac{\text{arcsen } x}{x^2} dx = \int \frac{z^2}{\text{sen}^2 z} \cos z\, dz = \int z\, c\,\text{tg } z.\cos ec\, z\, dz$$

Haciendo $\begin{cases} u = z \Rightarrow du = dz \\ dv = c\,\text{tg } z.\cos ec z\, dz \Rightarrow v = -\cos ec z \end{cases}$

$$\int \frac{\text{arcsen } x}{x^2} dx = -z\cos ec z - \int -\cos ec z\, dz = -\frac{z}{\text{sen } z} + \int \frac{dz}{\text{sen } z}$$

$$= -\frac{z}{\text{sen } z} + \ln|\text{tg}(\frac{z}{2})| + c$$

$$\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\,dx = -\frac{z}{\operatorname{sen} z} + \ln|\cos ec z - c\operatorname{tg} z| = -\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + c$$

1246 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

Desarrollo

Sea $\begin{cases} z = \operatorname{arcsen}\sqrt{x} \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = \operatorname{sen} z \\ x = \operatorname{sen}^2 z \;\Rightarrow\; dx = 2\operatorname{sen} z\cos z\,dz \end{cases}$

$$\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{z.2\operatorname{sen} z.\cos z}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z}}\,dz = 2\int z\operatorname{sen} z\,dz$$

Haciendo $\begin{cases} u = z \;\Rightarrow\; du = dz \\ dv = \operatorname{sen} z\,dz \;\Rightarrow\; v = -\cos z \end{cases}$

$$\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2(-z\cos z - \int -\cos z\,dz) = -2z\cos z + 2\operatorname{sen} z + c$$

$$= -2\operatorname{arcsen}\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x} + c$$

1247 $\displaystyle\int x\operatorname{tg}^2 2x\,dx$

Desarrollo

$$\int x\operatorname{tg}^2 2x\,dx = \int (x\sec^2 2x - x)dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = \sec^2 2x\,dx \;\Rightarrow\; v = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2} \end{cases}$

$$\int x\operatorname{tg}^2 2x\,dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\operatorname{tg} 2x + \frac{\ln|\cos 2x|}{4} + c$$

1248 $\int \frac{\text{sen}^2 x}{e^x} dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\text{sen}^2 x}{e^x} dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2e^x} dx = \frac{1}{2}\int e^{-x} dx - \frac{1}{2}\int e^{-x} \cos 2x\, dx$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{-x} \cos 2x\, dx \qquad \text{... (1)}$$

integrando $\int e^{-x} \cos 2x\, dx$, por partes se tiene:

Haciendo $\begin{cases} u = \cos 2x \Rightarrow du = -2\,\text{sen}\, 2x\, dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$

$$\int e^{-x} \cos 2x\, dx = e^{-x} \cos 2x + 2\int e^{-x}\, \text{sen}\, 2x\, dx$$

integrando por partes se tiene: $\int e^{-x} \cos 2x\, dx = \frac{2e^{-x}\,\text{sen}\, 2x - e^{-x} \cos 2x}{5}$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\int \frac{\text{sen}^2 x}{e^{-x}} dx = \frac{e^{-x}}{2}(\frac{\cos 2x - 2\,\text{sen}\, 2x - 1}{5}) + c$

1249 $\int \cos^2(\ln x) dx$

Desarrollo

Usar la identidad $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int \cos^2(\ln x) dx = \int \frac{1+\cos(2\ln x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2\ln x) dx \qquad \text{... (1)}$$

Sea $z = \ln x \Rightarrow \quad x = e^z \Rightarrow \quad dx = e^z dz$

$$\int \cos(2\ln x)dx = \int e^z \cos 2z\, dz$$

Haciendo $\begin{cases} u = e^z \Rightarrow du = e^z dz \\ dv = \cos 2x\, dx \Rightarrow v = -\dfrac{\operatorname{sen} 2z}{2} \end{cases}$

$$\int \cos(2\ln x)dx = \frac{e^z}{2}\operatorname{sen} 2z - \frac{1}{2}\int e^z \operatorname{sen} 2z\, dz$$

Haciendo $\begin{cases} u = e^z \Rightarrow du = e^z dz \\ dv = \operatorname{sen} 2z\, dz \Rightarrow v = -\dfrac{\cos 2z}{2} \end{cases}$

$$\int \cos(2\ln x)dx = \frac{e^z}{2}\operatorname{sen} 2z - \frac{1}{2}\int (-\frac{e^z}{2}\cos 2z + \frac{1}{2}\int e^z \cos 2z\, dz)$$

$$= \frac{x}{2}\operatorname{sen} 2(\ln x) + \frac{x}{4}\cos(2\ln x) - \frac{1}{4}\int \cos 2(\ln x)dx$$

$$\int \cos(2\ln x)dx = \frac{2x\operatorname{sen}(2\ln x) + x\cos(\ln x)}{5} \qquad \textbf{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \cos^2(\ln x)dx = \int \frac{1+\cos(2\ln x)}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{x\cos(2\ln x) + 2x\operatorname{sen}(2\ln x)}{10} + c$$

1250 $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$

<u>Desarrollo</u>

Haciendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} \end{cases}$

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \int \frac{dx}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$$

1251 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

Desarrollo

Sea $x = a \operatorname{tg} \theta \Rightarrow dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{(a^2\operatorname{tg}^2\theta + a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^4\sec^4\theta}$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2a^3}\int (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{\theta}{2a^3} + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2a^3} + c$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}(\frac{x}{a})}{2a^3} + \frac{ax}{2(a^2+x^2)a^3} + c = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\frac{x}{a})}{a} + \frac{x}{a^2+x^2}\right) + c$$

1252 $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

Desarrollo

Sea $x = a \operatorname{sen} \theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \operatorname{arcsen}(\frac{x}{a})$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta}\,.a\cos\theta\, d\theta = a^2\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= a^2\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{x}{a}) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$$

1253 $\int\sqrt{A+x^2}\,dx$

Desarrollo

Sea $x = \sqrt{A}\operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx = \sqrt{A}\sec^2\theta\, d\theta$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{\sqrt{A}} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{A}})$$

$$\int\sqrt{A+x^2}\,dx = \int\sqrt{A+A\operatorname{tg}^2\theta}.\sqrt{A}\sec^2 d\theta = \int A\sec^3\theta\, d\theta$$

se integra por partes:

$$\int A\sec^3\theta\, d\theta = A\int(1+\operatorname{tg}^2\theta)\sec\theta\, d\theta = A\int(\sec\theta + \operatorname{tg}^2\theta\sec\theta)d\theta$$

$$= A\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + A\operatorname{tg}\theta\sec\theta - A\int\sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{A}{2}[\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \operatorname{tg}\theta\sec\theta] + c$$

$$\int\sqrt{A+x^2}\,dx = \frac{A}{2}[\ln|\frac{\sqrt{A+x^2}+x}{\sqrt{A}}| + \frac{x}{A}\sqrt{A+x^2}] + c$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x+\sqrt{A+x^2}| + \frac{x}{2}\sqrt{A+x^2} + k$$

1254 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Desarrollo

$x = 3 \operatorname{sen} \theta \Rightarrow dx = 3 \cos \theta \, d\theta$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \theta = \operatorname{arcsen}(\frac{x}{3})$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9\operatorname{sen}^2\theta}{3\cos\theta}.3\cos\theta \, d\theta = 9\int \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int (1-2\cos\theta)d\theta = \frac{9\theta}{2} - \frac{9}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{x}{3}) - \frac{9}{2}(\frac{x}{3})\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + c = \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{x}{3}) - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + c$$

4.5. INTEGRALES ELEMENTALES QUE CONTIENEN UN TRINOMIO CUADRADO.-

1 INTEGRALES DEL TIPO.-

$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$, el procedimiento es el siguiente: El trinomio de segundo grado ax^2+bx+c, se reduce a la forma $ax^2+bx+c = a(x+k)^2+L$, donde k, L; son constantes y esto se consigue completando cuadrados.

2 INTEGRALES DEL TIPO.-

$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, los cálculos son análogos del 1) y después son integrales inmediatos.

3 INTEGRALES DEL TIPO.-

$\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, se usa la sustitución inversa $\frac{1}{mx+n}=t$

4 INTEGRALES DEL TIPO.-

$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, se completan cuadrados y la integral se reduce a una de las integrales principales.

1255 $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{2})+c$$

1256 $\int \frac{dx}{x^2+2x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{x^2+2x} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1-1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2-1} = \frac{1}{2}\ln|\frac{x+1-1}{x+1+1}|+c = \frac{1}{2}\ln|\frac{x}{x+2}|+c$$

1257 $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{3x^2-x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{6})^2+\frac{11}{36}} = \frac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}(\frac{6x-1}{\sqrt{11}})+c$$

1258 $\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$

Desarrollo

$$\int\frac{x\,dx}{x^2-7x+13}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-7}{x^2-7x+13}+\frac{7}{x^2-7x+13}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-7x+13|+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{7}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln|x^2-7x+13|+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-7}{\sqrt{3}})+c$$

1259 $\displaystyle\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$

Desarrollo

$$\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{x^2-4x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx+4\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5|+4\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}=\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5|+4\operatorname{arctg}(x-2)+c$$

1260 $\displaystyle\int\frac{(x-1)^2dx}{x^2+3x+4}$

Desarrollo

$$\int\frac{(x-1)^2dx}{x^2+3x+4}=\int(1-\frac{5x+3}{x^2+3x+4})dx=x-[\frac{5}{2}\int(\frac{2x+3}{x^2+3x+4}-\frac{\frac{9}{2}}{x^2+3x+4})dx]$$

$$=x-\frac{5}{2}\int\frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}$$

$$=x-\frac{5}{2}\ln|x^2+3x+4|+\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+3}{\sqrt{7}})+c$$

1261 $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$

Desarrollo

$$\int\frac{x^2dx}{x^2-6x+10}=\int(1+\frac{6x-10}{x^2-6x+10})dx=\int dx+\int\frac{6x-10}{x^2-6x+10}dx$$

$$=x+3\int\frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx+8\int\frac{dx}{(x-3)^2+1}$$

$$=x+3\ln|x^2-6x+10|+8\operatorname{arctg}(x-3)+c$$

1262 $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2(1+\frac{3}{2}x-x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{x}{\sqrt{(\frac{5}{4})^2-(x-\frac{3}{4})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}(\frac{4x-3}{5})+c$$

1263 $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}=\operatorname{arcsen}(2x-1)+c$$

1264 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}}=\ln|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}|+c$$

1265 $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} = 3\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$$

Sea $u=\sqrt{x^2-4x+5} \Rightarrow du = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx = 3\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx = 3\int du = 3u+c = 3\sqrt{x^2-4x+5}+c$$

1266 $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = \int \frac{(2x+1)-9}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = \int \frac{2x+1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = 9\int \frac{dx}{((\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(x+\frac{1}{2})^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -2\sqrt{1-x-x^2} - 9\,\text{arcsen}(\frac{2x+1}{\sqrt{5}})+c$$

1267 $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx = \frac{1}{5}\int \frac{(5x-1)+1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{5x-1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{5})^2+(\frac{2}{5})^2}}$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln|x-\frac{1}{5}+\sqrt{x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}|+c$$

1268 $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Desarrollo

Sea $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1-(\frac{1}{t^2})}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=-\ln|t+\sqrt{t^2-1}|+c$$

$$=-\ln|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}|+c=\ln|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}|+c$$

1269 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

Desarrollo

Sea $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}-1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t-t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-(t-\frac{1}{2})^2}}$$

$$=-\operatorname{arcsen}(\frac{2t-1}{\sqrt{5}})+c=-\operatorname{arcsen}(\frac{2-x}{\sqrt{5}x})+c$$

1270 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

Desarrollo

Sea $t = \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{t} = x-1 \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}+1)^2-2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = -\operatorname{arcsen}(\frac{2-x}{\sqrt{2}(x-1)})+c$$

1271 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

Desarrollo

Sea $x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+2(\frac{1}{t}-1)}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\operatorname{arcsen} t + c = -\operatorname{arcsen}(\frac{1}{x+1})+c$$

1272 $\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx$

Desarrollo

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\, dx$$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+4} + \frac{4}{2}\ln|x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}|+c$$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|+c$$

1273 $\int \sqrt{x-x^2}\, dx$

Desarrollo

$$\int \sqrt{x-x^2}\,dx = \int \sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}\,dx = \frac{x-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\operatorname{arcsen}(2x-1)+c$$

$$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\operatorname{arcsen}(2x-1)+c$$

1274 $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx$

Desarrollo

$$\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx = \int \sqrt{\frac{9}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}\,dx = \frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{2-x-x^2}+\frac{1}{2}.\frac{9}{4}\operatorname{arcsen}(\frac{2x+1}{3})+c$$

$$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+\frac{9}{8}\operatorname{arcsen}(\frac{2x+1}{3})+c$$

1275 $\int \frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}$

Desarrollo

$$\int \frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3} = \int \frac{x\,dx}{(x^2-2)^2-1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2-1}{x^2-2+1}\right|+c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|+c$$

1276 $\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen} x+12}$

Desarrollo

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen} x+12} = \int \frac{\cos x\,dx}{(\operatorname{sen} x-3)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{sen} x-3}{\sqrt{3}})+c$$

1277 $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$

Desarrollo

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \ln|e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}|+c$$

1278 $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}$

Desarrollo

$$\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}} = \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{(\cos x+2)^2-3}}$$

$$= -\ln|\cos x+2+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}|+c$$

1279 $\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$

Desarrollo

$$\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}} = \int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{5-(\ln x+2)^2}}$$

Sea $u = \ln x + 2 \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$, $\ln x = u - 2$

$$\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}} = \int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{5-(\ln x+2)^2}} = \int \frac{(u-2)du}{\sqrt{5-u^2}} = \int \frac{u\,du}{\sqrt{5-u^2}} - 2\int \frac{du}{\sqrt{5-u^2}}$$

$$= -\sqrt{5-u^2} - 2\arcsen(\frac{u}{\sqrt{5}})+c = -\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x} - 2\arcsen(\frac{\ln x+2}{\sqrt{5}})+c$$

4.6. INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES.-

(1) METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS.-

Consideremos dos funciones polinómicas:

$$P(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1 x+b_0 \text{ y } Q(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1 x+a_0$$

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas, es decir $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Cuando el grado de P(x) es menor que el grado de Q(x) a la función racional se denomina función racional propia, en caso contrario se denomina impropia.

Si la función racional es impropia al dividir el numerador por el denominador se puede representar la función dada como la suma de un polinomio y de una función racional.

Es decir: $\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, donde el grado de R(x) es menor que el grado de Q(x).

Nuestro interés es la integración de las funciones racionales propias:

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, para esto consideremos los siguientes casos:

PRIMER CASO: Cuando los factores de Q(x) son todos lineales y distintos.

Es decir: $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$, para este caso escribiremos:

$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_n}{x-a_n}}$ donde $A_1, A_2, ..., A_n$, son constantes que se van a determinar.

SEGUNDO CASO: Cuando los factores de Q(x) son todos lineales y algunos se repiten, suponiendo que $(x-a_1)$ es el factor que se repite P veces, para este caso existe la suma de P fracciones parciales.

$$\boxed{\frac{A_1}{x-a_i}+\frac{A_2}{(x-a_i)^2}+\dots+\frac{A_p}{(x-a_i)^p}}$$

donde $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$, son constantes que se van a determinar.

TERCER CASO: Los factores de Q(x) son lineales y cuadráticos irreducibles y ninguna de los factores cuadráticos se repiten. Para el factor cuadrático x^2+bx+c la función racional es de la forma:

$$\boxed{\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}}$$

CUARTO CASO: Cuando los factores de Q(x) son lineales y cuadráticos y algunos de los factores cuadráticos se repiten.

Si x^2+bx+c es un factor cuadrático que se repite m veces, entonces las fracciones parciales correspondientes a este factor son de la forma:

$$\boxed{\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\dots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}}$$

2 METODO DE OSTROGRADSKI.-

Si Q(x) tiene raíces múltiples, se tiene:

$$\boxed{\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{X(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx} \qquad \dots (\alpha)$$

donde $Q_1(x)$ es el máximo común divisor del polinomio Q(x) y de su derivada $Q'(x)$.

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} \div Q_1(x), \; X(x) \text{ e } Y(x)$$

son polinomios con coeficientes indeterminados, cuyos grados son menores en una unidad que los $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$, respectivamente, los coeficientes indeterminados de X(x), Y(x) se calcula derivando la identidad (α).

Hallar las integrales:

1280 $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

Desarrollo

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}, \text{ efectuando y agrupando:}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ Ab+Ba=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{a-b}, \; B = \frac{1}{a-b}$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \int (\frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b})dx = -\frac{1}{a-b}\int \frac{dx}{x+a} + \frac{1}{a-b}\int \frac{dx}{a+b}$$

$$= -\frac{1}{a-b}\ln|x+a| + \frac{1}{a-b}\ln|x+b| + c = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + c, \; a \neq b$$

1281 $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx = \int (1+\frac{3}{x^2-5x+6})dx = \int dx + 3\int \frac{dx}{(x-\frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}} = x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$$

1282 $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

Desarrollo

$\frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$, efectuando y agrupando:

$1 = (A+B+C)x^2 + (5A+2B+C)x + (6A-3B-2C)$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=0 \\ 5A+2B+C=0 \\ 6A-3B-2C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{12};\ B = -\frac{1}{3}\ ;\ C = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x+3| + c$$

$$= \frac{1}{12}[\ln|x-1| - 4\ln|x+2| + 3\ln|x+3|] + c = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+3)^4}\right| + c$$

1283 $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$

Desarrollo

$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4}$, efectuando y agrupando se obtiene:

$2x^2 + 41x - 91 = (A+B+C)x^2 + (-A-5B+2C)x - 12(A-4B+3C)$

de donde se obtiene: $\left.\begin{aligned} A+B+C=2 \\ -A-5B+2C=41 \\ -(12A-4B+2C)=-91 \end{aligned}\right\}$

resolviendo se tiene: A = 4, B = -7, C = 5

$$\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x+4)}dx=\int(\frac{4}{x-1}-\frac{7}{x+3}+\frac{5}{x-4})dx=\ln|\frac{(x+1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}|+c$$

1284 $\int\frac{5x^3+2}{x^3+5x^2+4x}dx$

Desarrollo

$$\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}=5+\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}=5+\frac{25x^2-20x+2}{x(x-4)(x-1)}$$

$\frac{25x^2-20x+2}{x(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{c-4}$, de donde

$$25x^2-20x+2=(A+B+C)x^2+(5A-4B-C)x+4A$$

$\left.\begin{aligned} A+B+C=25 \\ -5A-3B-C=-20 \\ 4A=2 \end{aligned}\right\}$, resolviendo el sistema: $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{7}{3}$, $C=\frac{161}{6}$

$$\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx=\int(5+\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-4})dx$$

$$=5x+\frac{1}{2}\ln x-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{161}{6}\ln|x-4|+c=5x+\ln|\frac{x^{\frac{1}{2}}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}}|+c$$

1285 $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

Desarrollo

$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$, efectuando la operación

$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \Rightarrow 1 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$, de donde:

$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{array}\right\}$ resolviendo el sistema: A = 1, B = -1, C = -1

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int (\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2})dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2})dx$$

$$= \ln x - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c = \ln|\frac{x}{x+1}| + \frac{1}{x+1} + c$$

1286 $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

Desarrollo

$\frac{x^3-1}{4x^3-x} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{x}{4}-1}{4x^3-x}$; $\frac{x-4}{x(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+\frac{1}{2}} + \frac{C}{x-\frac{1}{2}}$

de donde $x-4 = (A+B+C)x^2 + (-\frac{B}{2} + \frac{C}{2})x - \frac{A}{4}$

$\left.\begin{array}{l} A+B+C=0 \\ -\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=1 \\ -\frac{A}{4}=-4 \end{array}\right\}$ resolviendo el sistema: A = 16, B = -9, C = -7

$$\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx=\int(\frac{1}{4}+\frac{A}{x}+\frac{B}{x+\frac{1}{2}}+\frac{C}{x-\frac{1}{2}})dx=\frac{x}{4}+\frac{1}{16}\int\frac{x-4}{x(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})}dx$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{1}{16}\int(\frac{16}{x}+\frac{-9}{x+\frac{1}{2}}-\frac{7}{x-\frac{1}{2}})dx=\frac{x}{4}+\frac{1}{16}[16\ln x-9\ln(x+\frac{1}{2})-7\ln(x-\frac{1}{2})]$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{1}{16}\ln|\frac{x^{16}}{(x+\frac{1}{2})^9(x-\frac{1}{2})^7}|+c=\frac{x}{4}+\frac{1}{16}\ln|\frac{x^{16}}{(2x+1)^9(2x-1)^7}|+c$$

1287 $\displaystyle\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$

Desarrollo

$$\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}=x+\frac{8x+6}{x^3-6x^2+12x-8}=x+\frac{8x+6}{(x-2)^3}$$

$$\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx=\int(x+\frac{8x+6}{(x-2)^3})dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\int(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3})dx$$

$$\frac{8x+6}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}\Rightarrow 8x+6=Ax^2+(B-4A)x+2A-2B+C$$

$$\left.\begin{array}{l}A=0\\ B-4A=8\\ 2A-2B+C=6\end{array}\right\},\text{ resolviendo el sistema se tiene: } A=0,\ B=8,\ C=22$$

$$\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx=\frac{x^2}{2}+\int(\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{22}{(x-2)^3})dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x-2} - \frac{11}{(x-2)^2} + c$$

1288 $\int \frac{(5x^2+6x+9)dx}{(x-3)^2(x+1)^2}$

Desarrollo

$$\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$5x^2+6x+9 = (A+C)x^3 + (-A+B-5C+D)x^2 +$$

$$+(-5A+2B+3C-6D)x + (-3A+B+9C+9D)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ -A+B-5C+D=5 \\ -5A+2B+3C-6D=6 \\ -3A+B+9C+9D=9 \end{array}\right\}$$

resolviendo el sistema se tiene: A = 0, C = 0, $B = \frac{9}{2}$, $D = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{9}{2}(\frac{1}{x-3}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{x+1}) + c$$

1289 $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx = \int \frac{x^2-8x+7}{(x-5)^2(x+2)^2}dx$$

$$= \int \left(\frac{A}{x-5} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}\right) dx$$

$$x^2 - 8x + 7 = A(x+5)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x+2)(x-5)^2 + D(x-5)^2$$

agrupando y resolviendo se tiene: $A = \frac{30}{343}$, $B = -\frac{8}{49}$, $C = -\frac{30}{343}$, $D = \frac{27}{49}$

$$\int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} dx = \frac{30}{343} \ln|x-5| + \frac{8}{44}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{30}{343} \ln|x+2| - \frac{27}{49(x+2)}\right.$$

$$= \frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + \frac{30}{343} \ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right| + c$$

1290 $\int \frac{2x-3}{(x^2 - 3x + 2)^2} dx$

Desarrollo

Sea $u = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow$ du = (2x – 3) dx como

$$\int \frac{2x-3}{(x^2 - 3x + 2)^3} dx = \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2u^2} + c = -\frac{1}{2(x^2 - 3x + 2)^2} + c$$

1291 $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$

Desarrollo

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^3 + x}\right) dx = x + \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2 + 1)} \Rightarrow 1 = x^2(A+C) + Cx + A$$

de donde: $\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{array}\right\}$ resolviendo el sistema: A = 1, B = -1, C = 0

$$\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx = x+\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})dx = x+\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$

$$= x+\ln|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}|+c$$

1292 $\int\frac{x^4dx}{x^4-1}$

Desarrollo

$$\int\frac{x^4}{x^4-1}dx = \int(1-\frac{1}{x^4-1})dx = x+\int\frac{dx}{x^4-1}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$1=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B+C)x+A-B-D$$

$\left.\begin{array}{l} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{array}\right\}$, resolviendo el sistema: $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, C = 0, $D=-\frac{1}{2}$

$$\int\frac{x^4}{x^4-1}dx = x+\int(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1})dx = x+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= x+\frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+1}|-\frac{1}{2}arctgx+c$$

1293 $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$

Desarrollo

$$\frac{1}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}$$

efectuando operaciones y simplificando se tiene:

$$A(x^3+4x+5x) - A(x^2+4x+5) + B(x^3+4+5x) - 3B(x^2+4x+5) +$$

$$+C(x^3-4x^2+3x) + D(x^2-4x+3) = 1$$

$$(A+B+C)x^3 + (3A+B+4C+D)x^2 + (A-7B+3C-4D)x - 5A - 15B + 3D = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=0 \\ 3A+B-4C+D=0 \\ A-7B+3C-4D=0 \\ -5A-15B+3D=1 \end{array}\right\}$$

resolviendo el sistema se tiene: $A = \frac{1}{52}$, $B = -\frac{1}{20}$, $C = \frac{2}{65}$, $D = \frac{3}{36}$

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)} = \int \left(\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}\right)dx$$

$$= \frac{1}{52}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{20}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\frac{2x}{65} + \frac{3}{26}}{x^2+4x+5}dx$$

$$= \frac{1}{52}\ln(x-3) - \frac{1}{20}\ln(x-1) + \frac{1}{65}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx + \frac{7}{130}\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$= \frac{1}{52}\ln(x-3) - \frac{1}{20}\ln(x-1) + \frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5) + \frac{7}{130}arctg(x+2)$$

1294 $\int \frac{dx}{x^3+1}$

Desarrollo

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$1=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=0\\-A+B+C=0\\A+C=1\end{array}\right\},\quad \text{resolviendo el sistema se tiene:}\quad A=\frac{1}{3},\ \ B=-\frac{1}{3},\ \ C=\frac{2}{3}$$

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\int(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1})dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$$

$$=\frac{1}{6}\ln|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$$

1295 $\int \frac{dx}{x^4+1}$

Desarrollo

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$1=(A+C)x^3+(B+D+\sqrt{2}C-\sqrt{2}A)x^2+(A+C+\sqrt{2}A-\sqrt{2}B)x+B+D$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=0\\B+D+\sqrt{2}C-\sqrt{2}A=0\\A+C+\sqrt{2}D-\sqrt{2}B=0\\B+D=1\end{array}\right\}$$

resolviendo el sistema se tiene: $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B=D=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\int(\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1})dx=\int(\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1})dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1})dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{2}{4\sqrt{2}}\ln|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}|+\frac{\sqrt{2}}{4}arctg(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2})+c$$

1296 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$

Desarrollo

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$$

$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$$1=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$$

$$1=(A+C)x^3+(B-A+C+D)x^2+(A-B+C+D)x+B+D$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=0\\B-A+C+D=0\\A-B+C+D=0\\B+D=1\end{array}\right\}$$

resolviendo el sistema se tiene: $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{2}$

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\int(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1})dx=\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{x}\ln|\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}})+c$$

1297 $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Desarrollo

Sea $x=\operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx=\sec^2\theta\, d\theta$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2}=\int\frac{d\theta}{\sec^2\theta}=\int\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}+c=\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+\frac{x}{2(1+x^2)}$$

1298 $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$

Desarrollo

$(x^2+2x+2)^2=(x+1)^2+1^2 \Rightarrow z=x+1 \Rightarrow dz=dx$

$$\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}=3\int\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}dx+\int\frac{2dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=-\frac{3}{2(x^2+2x+2)}+2\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+2x+2)} + 2\int \frac{dx}{((x+1)^2+1)^2} = -\frac{3}{2(x^2+2x+2)} + 2\int \frac{dx}{(z^2+1)^2}$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+2x+2)} + 2\int \left(\frac{(z^2+1)}{(z^2+1)^2} - \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right)dz$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+2x+2)} + 2\,\text{arctg}\, z - 2\int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^2} \qquad \textbf{... (1)}$$

integrando por partes: $\int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^2} = -\frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{\text{arctg}\, z}{2}$

Luego reemplazando en (1) se tiene:

$$\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx = -\frac{3}{2(x^2+2x+2)} + 2\,\text{arctg}(x+1) + \frac{2x+2}{2(x^2+2x+2)} - \text{arctg}(x+1) + c$$

$$= \frac{2x+1}{2(x^2+2x+2)} + \text{arctg}(x+1) + c$$

1299 $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$

Desarrollo

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+B}{(x^2+x+1)^2}$$

efectuando operaciones y eliminando denominadores se tiene:

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+1)(x^2+x+1) + (x+1)(Dx+E)$$

agrupando y por entidad de polinomios tenemos: $\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A+2B+C=0 \\ 3A+2B+2C+D=0 \\ 2A+B+2C+D+E=0 \\ A+C+E=1 \end{array}\right\}$

resolviendo el sistema se tiene: A = 1, B = -1, C = 0, D = -1, E = 0

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}=\int[\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}]dx$$

$$=\int(\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x^2+x+1}-\frac{x}{(x^2+x+1)^2})dx$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int(\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1})dx-\frac{1}{2}\int(\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{(x^2+x+1)^2})dx$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+c$$

1300 $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$

Desarrollo

$$\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2-4x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2-4x+5)^2}$$

efectuando operaciones y eliminado denominadores:

$$x^3+1=(Ax+B)(x^2+x+1)+Cx+D$$

$$x^3+1=Ax^3+(-4A+B)x^2+(5A-4B+C)x+5B+D$$

por identidad se obtiene: $\begin{cases} A=1 \\ -4A+B=0 \\ 5A-4B+C=0 \\ 5B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=4A \Rightarrow B=4 \\ C=11 \\ D=-49 \end{cases}$

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx = \int (\frac{Ax+B}{x^2-4x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2-4x+5)^2})dx$$

$$= \int (\frac{x+4}{x^2-4x+5}+\frac{11x-19}{(x^2-4x+5)^2})dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\frac{2x-4}{x^2-4x+5}+\frac{12}{x^2-4x+5})dx + \frac{11}{2}\int \frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^2}dx + 3\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+5| + 6\operatorname{arctg}(x-2) - \frac{11}{2}(\frac{1}{x^2-4x+5}) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x-2) + \frac{3x-6}{2(x^2-4x+5)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+5| + \frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2) + \frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)} + c$$

Hallar las integrales siguientes, utilizando el método de Ostrogradski:

1301 $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x+1)(x^2+1)} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

derivando y agrupando se tiene:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=\frac{Dx^5+(E+D-A)x^4+(E+D+F-2B)x^3+}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

$$\frac{+(A+E+F-B+D-3C)x^2+(2A+E+F-2C)x+B+F-C}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

de donde se tiene:

$$1=Dx^5+(E+D-A)x^4+(E+D+F-2B)x^3+(A+E+F-B+D-3C)x^2+$$

$$+(2A+E+F-2C)x+B+F-C$$

$$\left.\begin{array}{l} D=0 \\ E+D-A=0 \\ E+D+F-2B=0 \\ A+E+F+D-B-2C=0 \\ 2A+E+F-2C=0 \\ B+F-C=1 \end{array}\right\}$$

resolviendo el sistema se tiene: D=0, $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=0$, $E=-\frac{1}{4}$, $F=\frac{3}{4}$

Como: $$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x+1)(x^2+1)}+\int\frac{Dx^2+Ex+F}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

$$=\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}-\frac{1}{4}\int\frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

$$=\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}-\frac{1}{4}[\int\frac{-2}{x+1}dx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{dx}{x^2+1}]$$

$$=\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+c$$

1302 $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4-1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}dx$$

derivando, simplificando y agrupando se tiene:

$$\frac{1}{(x^4-1)^2} = \frac{3A(x^6-x^2)+2B(x^5-x)+C(x^4-1)-4Ax^6+4Bx^5-4Cx^4-4Dx^3}{(x^4-1)^2} +$$

$$+\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4-1}$$

$$1 = Ex^7+(F-A)x^6+(G-2B)x^5+(H-3C)x^4+(-3D-E)x^3+$$

$$+(-3A-F)x^2+(-2B-G)x-C-H$$

$$\left.\begin{array}{l} E=0 \\ F-A=0 \\ G-2B=0 \\ H-3C=0 \\ -3A-E=0 \\ -3A-F=0 \\ -2B-G=0 \\ -C-H=1 \end{array}\right\}, \text{ resolviendo el sistema se tiene:}$$

$A=0$, $B=0$, $C=-\frac{1}{4}$, $D=0$, $C=0$, $F=0$, $G=0$, $H=-\frac{3}{4}$

Luego: $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4-1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4-1}dx$

$$= -\frac{1}{4(x^4-1)} + \int \frac{-\frac{3}{4}}{x^4-1}dx = -\frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{4}\int (-\frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1})dx$$

$$= -\frac{x}{4(x^4-1)} + \frac{3}{16}\int (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1})dx + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{x}{4(x^4-1)} + \frac{3}{16}\ln|\frac{x+1}{x-1}| + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + c$$

$$= \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16}\ln|\frac{x-1}{x+1}| + c$$

1303 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$

Desarrollo

Sea $x = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\operatorname{tg}^2\theta+1)^4} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^8\theta} = \int \frac{d\theta}{\sec^6\theta}$$

$$\int \cos^6\theta\, d\theta = \int (\cos^2\theta)^3 d\theta = \int (\frac{1+\cos 2\theta}{2})^3 d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 3\cos^2 2\theta + 3\cos 2\theta + \cos^3 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \frac{3}{2}(1+\cos 4\theta) + 3\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int (\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos 4\theta + 3\cos 2\theta + (1-\operatorname{sen}^2 2\theta)\cos 2\theta]d\theta$$

$$=\frac{1}{8}[\frac{5\theta}{2}+\frac{3}{8}\operatorname{sen}4\theta+\frac{3}{2}\operatorname{sen}2\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}-\frac{\operatorname{sen}^3 2\theta}{6}]+c$$

$$=\frac{1}{8}[\frac{5\theta}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta(2\cos^2\theta-1)+4\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3\theta\cos^3\theta]+c$$

$$=\frac{1}{8}[\frac{5}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{3}{2}\frac{x}{(x^2+1)}(\frac{2}{x^2+1}-1)+\frac{4x}{x^2+1}-\frac{4x^3}{3(x^2+1)^3}]+c$$

$$=\frac{15}{48}\operatorname{arctg}x+\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)}+c$$

1304 $\int\frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$

Desarrollo

$$\int\frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int(1+\frac{4x^3-10x^2+8x-2}{(x^2-2x+2)^2})dx$$

$$=x+\int\frac{4x^3-10x^2+8x-2}{(x^2-2x+2)^2}dx \qquad \textbf{... (1)}$$

$$\int\frac{4x^3-10x^2+8x+2}{(x^2-2x+2)^2}dx=\frac{Ax+B}{x^2-2x+2}+\int\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}dx$$

derivando, simplificando y agrupando se tiene:

$$\frac{4x^3-10x^2+8x-2}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{-Ax^2-2Bx+2A+2B}{(x^2-2x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

$$=\frac{Cx^3+(D-2C-A)x^2+(2C-2D-2B)x+2A+2B+2D}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$4x^3-10x^2+8x-2=Cx^3+(D-2C-A)x^2+(2C-2D-2B)x+2A+2B+2D$$

$$\left.\begin{array}{l} C=4 \\ D-2C-A=-10 \\ 2C-2D-2B=8 \\ 2A+2B+2D=-2 \end{array}\right\}$$ resolviendo el sistema se tiene: A=-1, B=3, C = 4, D = -3

$$\int\frac{4x^3-10x^2+8x-2}{(x^2-2x+3)^2}dx=-\frac{x-3}{x^2-2x+2}+\int\frac{4x-3}{x^2-2x+2}dx$$

$$=-\frac{x-3}{x^2-2x+2}+2\ln|x^2-2x+2|+\operatorname{arctg}(x-1) \qquad \ldots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int\frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx=x+\int\frac{4x^3-10x^2+8x-2}{(x^2-2x+2)^2}dx$$

$$=x-\frac{x-3}{x^2-2x+2}+2\ln|x^2-2x+2|+\operatorname{arctg}(x-1)+c$$

Hallar las integrales siguientes empleando diversos procedimientos.

1305 $\displaystyle\int\frac{x^5dx}{(x^3+1)(x^3+8)}$

Desarrollo

Sea $z=x^3 \Rightarrow dz=3x^2dx \Rightarrow \dfrac{dz}{3}=x^2dx$

$$\int\frac{x^5dx}{(x^3+1)(x^3+8)}=\int\frac{x^3.x^2dx}{(x^3+1)(x^3+8)}=\frac{1}{3}\int\frac{z\,dz}{(z+1)(z+8)}=\frac{1}{3}\int(\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+8})dz$$

$$\frac{z}{(z+1)(z+8)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+8}=\frac{(A+B)z+8A+B}{(z+1)(z+8)}$$

z = (A + B)z + 8a + B por igualdad se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 8A+B=0 \end{array}\right\} \text{ entonces } A=-\frac{1}{7},\ B=\frac{8}{7}$$

$$\int\frac{x^5dx}{(x^3+1)(x^3+8)}=\frac{1}{3}\int(\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+8})dz=-\frac{1}{21}[8\ln|z+8|-\ln|z+1|]+c$$

$$=\frac{1}{21}[8\ln|x^3+8|-\ln|x^3+1|]+c$$

1306 $\int\frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$

<u>Desarrollo</u>

$$\int\frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx=\int\frac{x^3(x^4+1)}{x^{12}-2x^4+1}dx$$

Sea $z=x^4 \Rightarrow dz=4x^3dx$

$$\int\frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{z+1}{z^3-2z+1}dz=\frac{1}{4}\int\frac{(z+1)dz}{(z-1)(z^2+z-1)}$$

$$=\frac{1}{4}\int(\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2+z-1})dz$$

$$\frac{z+1}{(z-1)(z^2+z-1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2+z-1}$$

efectuando operaciones y agrupando se tiene:

$$z+1=(A+B)z^2+(A-B+C)z-A-C,\ \text{de donde } \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ -A-C=1 \end{array}\right\}$$

resolviendo el sistema se tiene: A = 2, B = -2, C = -3

$$\int\frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx=\frac{1}{4}\int(\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2+z-1})dz=\frac{1}{4}\int(\frac{2}{z-1}-\frac{2z+3}{z^2+z-1})dz$$

$$=\frac{1}{2}\ln|z-1|-\frac{1}{4}\int\frac{2z+1}{z^2+z-1}dz-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+z-1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|z-1|-\frac{1}{4}\ln|z^2+z-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln|\frac{2z+1-\sqrt{5}}{2z+1+\sqrt{5}}|$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^4-1|-\frac{1}{4}\ln|x^8+x^4-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln|\frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}}|+c$$

1307 $\int\frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}dx$

<u>**Desarrollo**</u>

$$\frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}=\frac{A}{(x-4)^3}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{C}{(x-4)}+\frac{D}{x-2}$$

efectuando operaciones y agrupando se tiene:

$$x^2-x+14=(C+D)x^3+(B-10C-12D)x^2+(A-6B+32C+48D)x-$$
$$-2A-8B-32C-64D$$

$$\left.\begin{array}{l} C+D=0 \\ B-10C-12D=1 \\ A-6B+32C+48D=-1 \\ -2A+8B-32C-64D=14 \end{array}\right\}$$

resolviendo el sistema se tiene: A = 13, B = -3, C = 2, D = -2

$$\int\frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}dx=\int(\frac{A}{(x-4)^3}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{C}{x-4}+\frac{D}{x-2})dx$$

$$=13\int\frac{dx}{(x-4)^3}-3\int\frac{dx}{(x-4)^2}+2\int\frac{dx}{x-4}-2\int\frac{dx}{x-2}$$

$$=-\frac{13}{2(x-4)^2}+\frac{3}{x-4}+2\ln|\frac{x-4}{x-2}|+c$$

1308 $\int\frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$

<u>**Desarrollo**</u>

$$\int\frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}=\int(\frac{x^3+1}{x^4(x^3+1)^2}-\frac{x^3}{x^4(x^3+1)^2})dx$$

$$=\underbrace{\int\frac{dx}{x^4(x^3+1)}}_{A}-\underbrace{\int\frac{dx}{x(x^3+1)^2}}_{B} \quad \ldots (1)$$

$$A=\int\frac{dx}{x^4(x^3+1)}=\int(\frac{x^3+1}{x^4(x^3+1)}-\frac{x^3}{x^4(x^3+1)})dx$$

$$=\int\frac{dx}{x^4}-\int(\frac{x^3+1}{x(x^3+1)}-\frac{x^3}{x(x^3+1)})dx=-\frac{1}{3x^3}-\ln x+\frac{1}{3}\ln(x^3+1)$$

$$A=\int\frac{dx}{x^4(x^3+1)}=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3}\ln(x^3+1)-\ln x$$

$$B=\int\frac{dx}{x(x^3+1)^2}=-\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+\frac{1}{3}(\frac{1}{x^3+1})+\ln x$$

Luego:

$$\int \frac{dx}{x^4(x^2+1)^2} = -(\ln x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1) + \frac{1}{3(x^2+1)}) - \ln x + \frac{1}{3}\ln(x^3+1) - \frac{1}{3x^3}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right| - \frac{1}{3(x^3+1)} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right| - \frac{1}{3x^2} + c$$

$$= \frac{2}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right| - \frac{1}{3}(\frac{1}{x^3+1} + \frac{1}{x^3}) + c = \frac{1}{3}[2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right| - \frac{1}{x^3-1} - \frac{1}{x^3}] + c$$

1309 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$

Desarrollo

$$\frac{1}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

efectuando operaciones y agrupando se tiene:

$1 = A(x-2) + B(x^2-3x+2) + C(x^2-2x+1)$, de donde se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} B+C=0 \\ A-3B-2C=0 \\ -2A+2B+C=1 \end{array}\right\}$$ resolviendo el sistema: A = -1, B = -1, C = 1

$$\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2} = \int (\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2})dx$$

$$= -\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

1310 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{x(x^7+1)}=\int(\frac{x^7+1}{x(x^7+1)}-\frac{x^7}{x(x^7+1)})dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x^6dx}{x^7+1}=\ln x-\frac{1}{7}\ln|x^7+1|+c$$

1311 $\int\frac{dx}{x(x^5+1)^2}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{x(x^5+1)^2}=\int\frac{x^5+1}{x(x^5+1)}-\int\frac{x^4}{(x^5+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x(x^5+1)}-\int\frac{x^4}{(x^5+1)^2}dx$$

$$=\int\frac{x^5+1}{x(x^5+1)}dx-\int\frac{x^5}{x(x^5+1)}dx-\int\frac{x^4dx}{(x^5+1)^2}$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x^4}{x^5+1}dx+\frac{1}{5(x^5+1)}+c=\ln x-\frac{1}{5}\ln|x^5+1|+\frac{1}{5(x^5+1)}+c$$

1312 $\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$

Desarrollo

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+5}$$

efectuando operaciones y agrupando se tiene:

$$1=A(x^3+2x^2+5x)+B(x^2+2x+5)+C(x^3+2x^2+2x)+D(x^2+2x+2)$$

de donde se tiene: $\left.\begin{array}{l}A+C=0\\ 2A+B+2C+D=0\\ 5A+2B+2C+2D=0\\ 5B+2D=1\end{array}\right\}$

Resolviendo el sistema se tiene: $A=0,\ B=\frac{1}{3},\ C=0,\ D=-\frac{1}{3}$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)} = \int (\frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5})dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{2}) + c$$

1313 $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$

Desarrollo

Sea $z = x - 1 \Rightarrow x = z + 1 \Rightarrow dx = dz$

$$\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}} = \int \frac{(z+1)^2}{z^{10}}dz = \int (\frac{1}{z^8} + \frac{2}{z^9} + \frac{1}{z^{10}})dz$$

$$= -\frac{1}{7z^7} - \frac{1}{4z^8} - \frac{1}{9z^9} + c = -\frac{1}{7(x-1)^7} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{9(x-1)^9} + c$$

1314 $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{x^8+x^6} = \int \frac{dx}{x^6(x^2+1)} = \int (\frac{x^2+1}{x^6(x^2+1)} - \frac{x^2}{x^6(x^2+1)})dx$$

$$= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{x^2+1}{x^4(x^2+1)}dx + \int \frac{x^2}{x^4(x^2+1)}dx$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \frac{x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx - \int \frac{x^2dx}{x^2(x^2+1)}$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + c$$

4.7. INTEGRALES DE ALGUNAS FUNCIONES IRRACIONALES.-

(1) INTEGRALES DEL TIPO.-

$$\int R[x(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}},(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}},...]dx$$

donde R es una función racional y p_1, q_1, p_2, q_2... son números enteros, estas integrales se hallan valiéndose de la sustitución.

$$\frac{ax+b}{cx+d}=z^n$$

donde n es el mínimo común múltiplo de los números q_1, q_2,...

Hallar las integrales:

1315 $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

Desarrollo

Sea $z^2 = x-1 \Rightarrow$ dx = 2z dz

Como $z^2 = x-1 \Rightarrow z = \sqrt{x-1}$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{(z^2+1)^3}{z}2z\,dz = \int \frac{z^6+3z^4+3z^2+1}{z}2z\,dz$$

$$= 2\int (z^6+3z^4+3z^2+1)dz = 2(\frac{z^7}{7}+\frac{3}{5}z^5+z^3+z)+c$$

$$= 2z(\frac{z^6}{7}+\frac{3}{5}z^4+z^2+1)+c = 2\sqrt{x-1}(\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3}{5}(x-1)^2+x)+c$$

1316 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$

Desarrollo

Sea $z^3 = ax+b \Rightarrow dx = \frac{3}{a}z^2 dz$

Como $z^3 = ax+b \Rightarrow z = \sqrt[3]{ax+b}$ además $x = \frac{z^3-b}{a}$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}} = \int \frac{\frac{z^3-b}{a}}{z}.\frac{3z^2}{a}dz = \frac{3}{a^2}\int (z^4+bz)dz$$

$$= \frac{3}{a^2}(\frac{z^5}{5} - \frac{b}{2}z^2) + c = \frac{3}{10a}(2\sqrt[3]{(ax+b)^5} - 5b\sqrt[3]{(ax+b)^2}) + c$$

1317 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

Desarrollo

Sea $z^2 = x+1 \Rightarrow z = \sqrt{x+1} \Rightarrow z^3 = \sqrt{(x+1)^3}$

Como $z^2 = x+1 \Rightarrow x = z^2 - 1 \Rightarrow$ dx = 2z dz

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} = \int \frac{2z\,dz}{z+z^3} = 2\int \frac{dz}{z^2+1} = 2\operatorname{arctg}(z)+c = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x+1})+c$$

1318 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Desarrollo

Sea $x = z^6 \Rightarrow \sqrt{x} = z^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = z^2$ además $dx = 6z^5 dz$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6z^5 dz}{z^3+z^2} = 6\int \frac{z^3}{z+1}dz = 6\int (z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1})dz$$

$$= 6(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z - \ln(z+1)) + c$$

1319 $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

Desarrollo

Sea $x = z^6 \Rightarrow \sqrt{x} = z^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = z^2$ además $dx = 6z^5 dz$

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \int \frac{z^3-1}{z^2+1} 6z^5 dz = 6\int \frac{z^8 - z^5}{z^2+1} dz$$

$$= 6\int (z^6 - z^4 - z^3 - z^2 - z - 1 - \frac{z-1}{z^2+1}) dz$$

$$= 6(\frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} - z - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) + \text{arctg } z)$$

$$= \frac{6x}{7}\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3\ln(\sqrt[3]{x}+1) + 6\,\text{arctg}\sqrt[6]{x} + c$$

1320 $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$

Desarrollo

Sea $z^2 = x+1 \Rightarrow$ dx = 2z dz

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{z+2}{z^4 - z} 2z\, dz = 2\int \frac{z+2}{z^3-1} dz = 2\int (\frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+z+1}) dz$$

Luego: $\frac{z+2}{z^3-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+z+1}$

$$z+2 = A(z^2+z+1) + (z-1)(Bz+C) \Rightarrow z+2 = A(z^2+z+1) + B(z^2-z) + C(z-1)$$

de donde: $\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ A-C=2 \end{array}\right\}$ resolviendo el sistema se tiene: A = 1, B = -1, C= -1

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx=2\int\frac{z+2}{z^3-1}dz=2\int(\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2+z+1})dz$$

$$=2\int(\frac{1}{z-1}-\frac{z+1}{z^2+z+1})dz=2\ln(z-1)-\int\frac{2z+1}{z^2+z+1}dz-\int\frac{dz}{z^2+z+1}$$

$$=2\ln(z-1)-\ln(z^2+z+1)-\int\frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=2\ln(z-1)-\ln(z^2+z+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}})+c$$

$$=\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}})+x$$

$$=\ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}})+c$$

1321 $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{x+2}$

Desarrollo

Sea $z^2=x \Rightarrow$ dx = 2z dz

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx=\int\frac{z.2z}{z^2+2}dz=2\int\frac{z^2}{z^2+2}dz=2\int(1-\frac{2}{z^2+2})dz$$

$$=2(z-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{z}{\sqrt{2}}))+c=2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{x}{2}})+c$$

1322 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

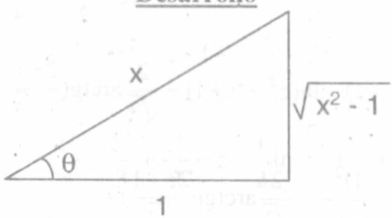
Desarrollo

Sea $1-x=z^2 \Rightarrow 2-x=z^2+1 \Rightarrow$ dx = -2z dz

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\int \frac{-2z\,dz}{(z^2+1)z}=-2\int \frac{dz}{z^2+1}=-2\,\text{arctg}(z)+c=-2\,\text{arctg}(\sqrt{1-x})+c$$

1323 $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

Desarrollo



$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.(x-1)dx$$

$\sec\theta = x \Rightarrow dx = \sec\theta.\ \text{tg}\,\theta\, d\theta$

$$\cos ec\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.(x-1)dx$$

$$=\int \cos ec\theta(\sec\theta-1)\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta=\int(\sec\theta-1)\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\int \sec^3\theta\,d\theta-\int \sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int \sec^3\theta\,d\theta-\int \sec^2\theta\,d\theta \qquad \dots(\alpha)$$

integrando por partes $\int \sec^3\theta\, d\theta$ se tiene:

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}[\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \sec\theta\operatorname{tg}\theta]$$

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \frac{1}{2}[\ln|\sec\theta\operatorname{tg}\theta| + \sec\theta\operatorname{tg}\theta] - \operatorname{tg}\theta + c$$

$$= \frac{1}{2}[\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + x\sqrt{x^2-1}] - \sqrt{x^2-1} + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2) + c$$

1324 $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

<u>**Desarrollo**</u>

Sea $z^3 = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{z^3+1}{z^3-1} \Rightarrow dx = \frac{-6z^2dz}{(z^3-1)^2}$

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = \int \frac{-6z^3dz}{(z^3-1)^2} = -6\int \frac{z^3dz}{(z^3-1)^2}$$

$$= -6\int \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+z+1)^2} = -6\int \left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{Cz+D}{z^2+z+1} + \frac{Ez+F}{(z^2+z+1)^2}\right)dz$$

$$\frac{z^3}{(z^3-1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{Cz+D}{z^2+z+1} + \frac{Ez+F}{(z^2+z+1)^2}$$

efectuando operaciones y agrupando se tiene:

$$z^3=(A+C)z^5+(A+B-C+D)z^4+(A+2B-D+E)z^3+(B-A-C-2E+F)z^2$$
$$+(2B-A+C-D+E-2F)z+B-A+D+F$$

por identidad de polinomios se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ A+B-C+D=0 \\ A+2B-D+E=1 \\ B-A-C-2E+F=0 \\ 2B-A+C-+E-2F=0 \\ B-A+D+F=0 \end{array}\right\}, \quad \text{resolviendo el sistema se tiene:}$$

$$A=\frac{11}{81},\ B=\frac{1}{9},\ C=-\frac{31}{81},\ D=-\frac{31}{81},\ E=\frac{7}{27},\ F=\frac{11}{27}$$

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=-6\int(\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{Cz+D}{z^2+z+1}+\frac{Ez+F}{(z^2+z+1)^2})dz$$

$$=-6\int(\frac{\frac{11}{81}}{z-1}+\frac{\frac{1}{9}}{(z-1)^2}-\frac{\frac{11}{81}z+\frac{31}{81}}{z^2+z+1}+\frac{\frac{7}{27}z+\frac{11}{27}}{(z^2+z+1)^2})dz$$

integrando cada termino y simplificando se tiene:

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=\frac{1}{3}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}})+\frac{2z}{z^3-1}+c \quad \text{donde} \quad z=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

1325 $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$

Desarrollo

Sea $z^2=2x+3 \Rightarrow$ z dz = dx $\Rightarrow x=\dfrac{z^2-3}{2}$

$$\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx = \int \frac{z^2-\frac{3}{2}+3}{(z^2-\frac{3}{2})^2 z} z\,dz = 2\int \frac{z^2+3}{(z^2-3)^2}dz$$

$$\int \frac{z^2+3}{(z^2-3)^2}dz = \int \left(\frac{Az+B}{(z^2-3)^2}+\frac{Cz+D}{z^2-3}\right)dz$$

derivando, simplificando y agrupando:

$$\frac{z^2+3}{(z^2-3)^2} = -\frac{Az^2-2Bz-3A}{(z^2-3)^2}+\frac{Cz+D}{z^2-3} = \frac{Cz^3+(D-A)z^2+(-2B-3C)z-3A-3D}{(z^2-3)^2}$$

$$z^2+3 = Cz^3+(D-A)z^2+(-2B-3C)z-3A-3D$$

$$\left.\begin{array}{l} C=0 \\ -2B-3C=0 \\ D-A=1 \\ -3A-3D=3 \end{array}\right\}$$ resolviendo se tiene: A = -1, B = 0, C = 0, D = 0

$$\int \frac{z^2+3}{(z^2-3)^2}dz = \int \left(\frac{Az+B}{z^2-3}+\frac{Cz+D}{(z^2-3)^2}\right)dz = -\frac{z}{z^2-3} \qquad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx = 2\int \frac{z+3}{(z^2-3)^2}dz = -\frac{2z}{z^2-3}+c = -\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+c$$

(2) INTEGRALES DEL TIPO.-

$\boxed{\int \frac{p_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$ donde $p_n(x)$ es un polinomio de grado n, se supone que

$$\boxed{\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}} \quad ...(3)$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado (n – 1) con coeficientes indeterminados y λ es un numero. Los coeficientes del polinomio $Q_{n-1}(x)$ y el numero λ se hallan derivando la identidad (3).

3 INTEGRALES DEL TIPO.-

$\boxed{\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}}$, se reduce al 2° tipo de integrales valiéndose de la sustitución: $\frac{1}{x-\alpha}=t$

Hallar las integrales:

1326 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Desarrollo

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = (Ax+B)\sqrt{x^2-x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}, \text{ derivando se tiene:}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2A(x^2-x+1)+A(2x^2-x)+B(2x-1)+2}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$2x^2 = 4Ax^2+(2B-3A)x+2A-B+2\lambda \quad \text{de donde: } A=\frac{1}{2},\ B=\frac{3}{4},\ \lambda=-\frac{1}{8}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = (\frac{x}{2}+\frac{3}{4})\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$= \frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\ln|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}| + c$$

1327 $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Desarrollo

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)\sqrt{1-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$ derivando se tiene

$$\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} = (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D)\sqrt{1-x^2} - \frac{x(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x^5 = (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D)(1-x^2) - (Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex) + \lambda$$

$$x^5 = -5Ax^5 - 4Bx^4 + (4A-3C)x^3 + (3B-2D)x^2 + (2C-E)x + D + \lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} -5A = 1 \\ -4B = 0 \\ 4A - 3C = 0 \\ 3B - 2D = 0 \\ 2C - E = 0 \\ D + \lambda = 0 \end{array}\right\}$$ resolviendo se tiene: $A = -\frac{1}{5}$, $C = -\frac{4}{15}$, $D = 0$, $E = -\frac{8}{15}$, $\lambda = 0$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)\sqrt{1-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left(-\frac{x^4}{5} - \frac{4}{15}x^2 - \frac{8}{15}\right)\sqrt{1-x^2} = -\frac{8 + 4x^2 + 3x^4}{15}\sqrt{1-x^2} + c$$

1328 $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Desarrollo

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx = (Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\sqrt{1+x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

derivando y agrupando se tiene:

$$\frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{6Ax^6+5Bx^5+(5A+4C)x^4+(4B+3D)x^3+}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{+(3C+2E)x^2+(2D+F)x+E+\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$x^6 = 6Ax^6+5Bx^5+(5A+4C)x^4+(4B+3D)x^3+(3C+2E)x^2+(2D+F)x+E+\lambda$$

de donde: $A=\frac{1}{6}$, B = 0, $C=-\frac{5}{24}$, D = 0, $E=\frac{5}{16}$, $\lambda=-\frac{5}{16}$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1+x^2}} = (Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\sqrt{1+x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= (\frac{x^5}{6}-\frac{5x^3}{24}+\frac{5x}{16})\sqrt{1+x^2}-\frac{5}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= (\frac{x^5}{6}-\frac{5x^3}{24}+\frac{5x}{16})\sqrt{1+x^2}-\frac{5}{16}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+c$$

1329 $\int\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$

Desarrollo

Sea $\frac{1}{x}=t \Rightarrow x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^5}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=-\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=(At^3+Bt^2+Ct+D)\sqrt{1-t^2}-\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

derivando y agrupando se tiene:

$$-t^4=-4t^4-3Bt^3+(3A-2C)t^2+(2B-D)t+C+\lambda$$

de donde: $A=\frac{1}{4}$, B = 0, $C=\frac{3}{8}$, D = 0 , $\lambda=-\frac{3}{8}$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{t^4dt}{\sqrt{1-t^2}}=(At^3+Bt^2+Ct+D)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{dr}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=(\frac{t^3}{4}+\frac{3t}{8})\sqrt{1-t^2}-\frac{3}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=(\frac{t^3}{4}+\frac{3t}{8})\sqrt{1-t^2}-\frac{3}{8}\operatorname{arcsen}t+c$$

$$=(\frac{1}{4x^4}+\frac{3}{8x^2})\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}\operatorname{arcsen}(\frac{1}{x})+c$$

1330 $\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$

Desarrollo

Hacemos $\frac{1}{x+1}=t \Rightarrow x+1=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}$$

donde $x^2+2x=(x+1)^2-1=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{-t^2+1-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$$\int\sqrt{1-t^2}dt-\int\frac{dy}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\text{arcsen}\, t-\text{arcsen}\, t+c$$

$$=\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}-\frac{1}{2}arcsent+c=\frac{1}{2(x+1)}\sqrt{1-\frac{1}{(x+1)^2}}-\frac{1}{2}arcsen(\frac{1}{x+1})+c$$

$$=\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}arcsen(\frac{1}{x+1})+c$$

1331 $\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x++1}}dx$

Desarrollo

$$\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx=\int(\frac{x(x+1)}{x\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{x\sqrt{x^2-x+1}})dx$$

$$=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx+\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}+\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$$

integrando y de acuerdo a las integrales anteriores se tiene:

$$=\sqrt{x^2-x+1}+\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}|-\ln|1-\frac{x}{2}+\sqrt{x^2-x+1}|+c$$

4.8. INTEGRALES DE LAS DIFERENCIALES BINOMICAS.-

$$\boxed{\int x^m (a+bx^n)^p\,dx} \qquad \ldots (1)$$

donde m, n y p son números racionales.

CONDICIÓN DE CHEBICHEC.-

La integral (1), puede expresarse por medio de una combinación finita de funciones elementales, únicamente en los tres casos:

1. Cuando p es entero.

2. Cuando $\frac{m+1}{n}$ es número entero, aquí se emplea la sustitución $a+bx^n = z^s$, donde "s" es el divisor de la fracción p.

3. Cuando $\frac{m+1}{n}+p$, es número entero, en este caso se emplea la sustitución $ax^{-n}+b = z^s$.

Hallar las integrales:

1332 $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$

Desarrollo

$\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ es un entero

entonces: $1+2x^2 - z^2 \Rightarrow x^2 = \frac{z^2-1}{2} \Rightarrow x\,dx = \frac{z\,dz}{2}$

$$\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \int x^2(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}x\,dx = \int \frac{z^2-1}{2}.(z^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{z\,dz}{2} = \frac{1}{4}\int(1-z^{-2})dz$$

$$= \frac{1}{4}(z + \frac{1}{z}) + c = \frac{1}{4}(\frac{z^2+1}{z}) + c = \frac{1}{4}(\frac{2+2x^2}{\sqrt{1+2x^2}}) + c = \frac{1}{2}(\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}) + c$$

1333 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Desarrollo

Sea $x^{-4} + 1 = z^4 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{z^4 - 1} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{z^4-1}} \Rightarrow dx = -z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx = \int (\frac{z^4}{z^4-1})^{-\frac{1}{4}}(-z^3)(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz$$

$$= -\int \frac{z^2}{z^4-1}dz = -\int (\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{Cz+D}{z^2+1})dz$$

$\frac{z^2}{z^4-1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{Cz+D}{z^2+1}$, efectuando operaciones y agrupando

$z^2 = (A+B+C)z^3 + (B-A+D)z^2 + (A+B-C)z + B - A - D$ de donde se tiene:

$\left.\begin{array}{l} A+B+C=0 \\ B-A+D=1 \\ A+B-C=0 \\ B-A-D=0 \end{array}\right\}$ resolviendo el sistema se tiene: $A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}$, C = 0, $D = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{z^2}{z^4-1}dz = \int (\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{Cz+D}{z^2+1})dz = -\frac{1}{4}\ln|z+1| + \frac{1}{4}\ln|z-1| + \frac{1}{2}\text{arctg}\, z + c$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + \frac{1}{2}\text{arctg}\, z + c$$

Luego:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{z^2dz}{z^4-1}=-(\frac{1}{4}\ln|\frac{z-1}{z+1}|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z)+c=\frac{1}{4}\ln|\frac{z+1}{z-1}|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+c$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^{-4}+1}+c$$

1334 $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

Desarrollo

Sea $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^4}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{t^3dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\int t^3(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}dt$$

Sea $z^2=1+t^2 \Rightarrow$ z dz = t dt

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}dt=-\int(z^2-1)z^{-}.z\,dz$$

$$=-\int(z^2-1)dz=-(\frac{z^3}{3}-z)+c=-\frac{z}{3}(z^2-3)+c=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{3}(1+t^2-3)+c$$

$$=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{3}(t^2-2)+c=-\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3}(\frac{1}{x^2}-2)+c=\frac{\sqrt{1+x^2}}{3x^3}(2x^2-1)+c$$

1335 $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$

Desarrollo

Sea $1+x^5 = z^3 \Rightarrow x^5 = z^3-1 \Rightarrow x=(z^3-1)^{\frac{1}{5}}$, $dx = -\frac{3}{5}(z^3-1)^{-\frac{4}{5}}z^2dz$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}dx = \int(z^3-1)^{-\frac{1}{5}}(z^3)^{-\frac{1}{3}}\frac{3}{5}(z^3-1)^{-\frac{4}{5}}z^2dz$$

$$=\frac{3}{5}\int(z^3-1)^{-1}z\,dz = \frac{3}{5}\int\frac{z}{z^3-1}dz = \frac{3}{5}\int\frac{z\,dz}{(z-1)(z^2+z+1)}$$

$$=\frac{3}{5}\int(\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2+z+1})dz$$

$\frac{z}{z^3-1} = \frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2+z+1}$ de donde se tiene:

$z=(A+B)z^2+(A-B+C)z+A-C$

$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ A-C=0 \end{array}\right\}$ resolviendo el sistema se tiene: $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5}\int[\frac{\frac{1}{3}}{z-1}-\frac{1}{3}(\frac{z-1}{z^2+z+1})]dx = \frac{1}{5}[\int\frac{1}{z-1}dz-\int\frac{z-1}{z^2+z+1}dz]$$

$$=\frac{1}{5}[\ln(z-1)-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{z^2+z+1})+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}})]$$

$$=\frac{1}{5}.\frac{\ln(z-1)^2-\ln(z^2+z+1)}{2}+\frac{\sqrt{3}}{5}\mathrm{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}})+c$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\mathrm{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}})+c \quad \text{donde} \quad z=\sqrt[3]{1+x^5}$$

1336 $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}$

Desarrollo

Sea $2x^{-3}+1=z^3 \Rightarrow x^3=\frac{2}{z^3-1} \Rightarrow x=\frac{\sqrt[3]{2}}{(z^3-1)^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow dx=-\sqrt[3]{2}(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}z^2dz$

$x^2=(\sqrt[3]{2})^2(z^3-1)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow x^{-2}=\frac{(z^3-1)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow 2+x^3=2z^3(z^3-1)^{-1}$

$$\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}=\int x^{-2}(2+x^3)^{-\frac{5}{3}}dx$$

$$=\int \frac{(z^3-1)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{4}}(2z^3(z^2-1)^{-1})^{-\frac{5}{3}}(-\sqrt[3]{2})(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}z^2dz$$

$$=-\frac{2^{-\frac{5}{3}}\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}}\int (z^3-1)^{-\frac{2}{3}}z^{-5}(z^3-1)^{\frac{5}{3}}z^2dz=-\frac{1}{4}\int (z^3-1)z^{-3}dz$$

$$=-\frac{1}{4}\int (1-z^{-3})dz=-\frac{1}{4}[z+\frac{1}{2z^2}]+c=-\frac{1}{4}[\frac{2z^3+1}{2z^2}]+c$$

$$=-\frac{1}{8}[\frac{2(2x^{-3}+1)+1}{\sqrt[3]{(2x^{-3}+1)^2}}]+c=-\frac{1}{8}(\frac{4+3x^2}{x(2+x^3)^{\frac{2}{3}}})+c$$

1337 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}}$

Desarrollo

Hacemos $1+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=t^3$, $t=\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}}$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x^3}=\frac{1}{t^3-1} \quad \Rightarrow \sqrt[4]{x}=\sqrt[3]{\frac{1}{t^3-1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}}$$

$$\sqrt[4]{x^7}=\frac{1}{(t^3-1)^{\frac{7}{3}}} \ , \ \sqrt[4]{x^3}=\frac{1}{(t^3-1)^2}$$

de $1+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=t^3 \quad \Rightarrow \frac{-3dx}{4\sqrt[4]{x^7}}=3t^2dt \quad \Rightarrow dx=\frac{-4t^2dt}{(t^3-1)^{\frac{7}{3}}}$. Luego:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^3\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}}=\int\frac{-4t^2(t^3-1)^2}{(t^3-1)^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{\frac{t^3}{t^3-1}}}dt=-4\int\frac{t^2(t^3-1)^2(t^3-1)^{\frac{1}{3}}}{(t^3-1)^{\frac{7}{3}}t}dt$$

$$=-4\int t\,dt=-2t^2+c=-2(\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}})^2+c=-2(\sqrt[3]{(1+x^{-\frac{3}{4}})^2})+c$$

4.9. INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.-

① INTEGRALES DE LA FORMA.-

$\boxed{\int \operatorname{sen}^n x\,dx \text{ , y } \int \cos^n x\,dx}$ donde m y n son números enteros.

PRIMER CASO.- Cuando n es un entero positivo par se usan las identidades siguientes:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

SEGUNDO CASO.- Cuando n es un entero positivo impar dentro del integrando se saca el factor común sen x dx o cos x dx, respectivamente, luego se usa la identidad:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1}$$

(2) PARA LOS INTEGRALES DE LA FORMA.-

$$\boxed{\int \operatorname{tg}^n x\,dx \quad \text{y} \quad \int c\operatorname{tg}^n x\,dx}$$

si n es par o impar se usan las identidades:

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x\ ,\ 1+c\operatorname{tg}^2 x=\csc^2 x}$$

(3) PARA LAS INTEGRALES DE LA FORMA.-

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x\,dx}$$

PRIMER CASO.- Si m o n es un entero positivo impar y el otro cualquier numero.

Se procede de la siguiente manera:

Si m es impar se saca factor sen x dx y se usa la identidad: $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$

SEGUNDO CASO.- Si m y n son enteros positivos pares se usa la fórmula:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ ,\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

(4) PARA LAS INTEGRALES DE LA FORMA.-

$$\boxed{\int \operatorname{tg}^m x.\sec^n x\,dx\ ,\ \int c\operatorname{tg}^m x.\csc^n x\,dx}$$

PRIMER CASO.- Cuando n es un entero positivo par y m es cualquier número, se saca el factor.

$$\sec^2 x\,dx \quad o \quad \csc^2 x\,dx$$

y se usan las identidades: $1+tg^2 x = \sec^2 x$, $1+c\,tg^2 x = \csc^2 x$

SEGUNDO CASO.- Cuando m es un entero positivo impar, n es cualquier número, se saca como factor.

$$\sec x.\ tg\ x\ dx \quad o \quad \csc x.\ ctg\ x\ dx$$

y se usa la identidad: $1+tg^2 x = \sec^2 x$, $1+c\,tg^2 x = \csc^2 x$

Hallar las integrales

1338 $\int \cos^3 x\,dx$

Desarrollo

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x.\cos x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx$$

$$= \int \cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 x.\cos x\,dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$$

1339 $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = \int \operatorname{sen}^4 x.\operatorname{sen} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= \int (1-2\cos^2 x + \cos^4 x)\operatorname{sen} x\,dx$$

$$= \int \operatorname{sen} x\,dx - 2\int \cos^2 x.\operatorname{sen} x\,dx + \int \cos^4 x.\operatorname{sen} x\,dx$$

$$= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

1340 $\int \operatorname{sen}^2 x.\cos^3 x\,dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{sen}^2 x.\cos^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x.\cos x\,dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^4 x.\cos x\,dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + c$$

1341 $\int \operatorname{sen}^3(\frac{x}{2}).\cos^5(\frac{x}{2})dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{sen}^3(\frac{x}{2}).\cos^5(\frac{x}{2})dx = \int \cos^5(\frac{x}{2}).\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2}).\operatorname{sen}(\frac{x}{2})dx$$

$$= \int \cos^5(\frac{x}{2}).(1-\cos^2(\frac{x}{2}))\operatorname{sen}(\frac{x}{2})dx$$

$$= \int \cos^5(\frac{x}{2})\operatorname{sen}(\frac{x}{2})dx - \int \cos^7(\frac{x}{2})\operatorname{sen}(\frac{x}{2})dx = -\frac{\cos^6(\frac{x}{2})}{3} + \frac{\cos^8(\frac{x}{2})}{4} + c$$

1342 $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2}{\operatorname{sen}^3 x}\cos x\,dx$$

$$\int \frac{1-2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^4 x}{\operatorname{sen}^3 x}\cos x\,dx = \int (c\operatorname{tg} x.\csc^2 x - 2c\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x.\cos x)dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} - 2\ln|\operatorname{sen}| + c$$

1343 $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

Desarrollo

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \int (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}[x - \operatorname{sen}(2x) + \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{8}] + c = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + c$$

1344 $\int \operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x\,dx$

Desarrollo

$$\operatorname{sen} x.\cos x = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx = \int (\operatorname{sen} x\cos x)^2 dx = \int (\frac{sen 2x}{2})dx = \frac{1}{4}\int sen^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{8}[x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}] + c = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + c$$

1345 $\int \operatorname{sen}^2 x.\cos^4 x\,dx$

Desarrollo

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x.\cos^4 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}.(\frac{1+\cos 2x}{2})^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x(1+\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int [\frac{1-\cos 4x}{2} + \operatorname{sen}^2 2x.\cos 2x]dx = \frac{1}{8}[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}] + c$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + c$$

1346 $\int \cos^6 3x\,dx$

Desarrollo

$$\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}$$

$$\int \cos^6 3x\,dx = \int (\cos^2 3x)^3 dx$$

$$= \int (\frac{1+\cos 6x}{2})^3 dx = \frac{1}{8}\int (1+3\cos 6x + 3\cos^2 6x + \cos^3 6x)dx$$

$$= \frac{1}{8}(x + \frac{\operatorname{sen} 6x}{2} + 3\int \frac{1+\cos 12x}{2} dx + \int \cos^3 6x\,dx$$

$$= \frac{1}{8}(x + \frac{\operatorname{sen} 6x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 12x}{8} + \int (1-\operatorname{sen}^2 6x)\cos 6x\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{5x}{2}+\frac{\operatorname{sen}6x}{2}+\frac{\operatorname{sen}12x}{8}+\frac{\operatorname{sen}6x}{6}-\frac{\operatorname{sen}^3 6x}{18}\right)+c$$

$$=\frac{5x}{16}+\frac{\operatorname{sen}6x}{12}+\frac{\operatorname{sen}12x}{64}-\frac{\operatorname{sen}^3 6x}{144}+c$$

1347 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}=\int \csc^4 x\,dx=\int \csc^2 x\csc^2 x\,dx=\int (1+ctg^2 x)\csc^2 x\,dx$$

$$=\int (\csc^2 x+ctg^2 x.\csc^2 x)dx=-c\operatorname{tg}x-\frac{c\operatorname{tg}^3 x}{3}+c$$

1348 $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x}=\int \sec^6 x\,dx=\int \sec^4 x.\sec^2 x\,dx$$

$$=\int (1+\operatorname{tg}^2 x)^2\sec^2 x\,dx=\int (1+2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)\sec^2 x\,dx$$

$$=\int (\sec^2 x+2\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x+\operatorname{tg}^4 x.\sec^2 x)dx=\operatorname{tg}x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+c$$

1349 $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}dx=\int c\operatorname{tg}^2 x.\csc^4 x\,dx=\int c\operatorname{tg}^2 x(1+c\operatorname{tg}^2 x)\csc^2 x\,dx$$

$$= \int (c\operatorname{tg}^2 x.\csc^2 x + c\operatorname{tg}^4 x.\csc^2 x)dx = -\frac{c\operatorname{tg}^3 x}{3} - \frac{c\operatorname{tg}^5 x}{5} + c$$

1350 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x.\cos^4 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x\cos^4 x}dx = \int (\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x})dx$$

$$= \int (\sec^4 x + 4\csc^2 2x)dx = \int [(1+\operatorname{tg}^2 x)\sec^2 x + 4\csc^2 2x)]dx$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2c\operatorname{tg} 2x + c$$

1351 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x\cos^3 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x\cos^3 x} = \int \frac{\csc^6 x}{\csc^6 x.\operatorname{sen}^5 x\cos^3 x}dx = \int \frac{\csc^6 x}{\csc x.\cos^3 x}dx$$

$$\int \frac{(1+c\operatorname{tg}^2 x)^3}{c\operatorname{tg} x.\cos^2 x}dx = \int \operatorname{tg} x\sec^2 x(1+3c\operatorname{tg}^2 x + 3c\operatorname{tg}^4 x + c\operatorname{tg}^6 x)dx$$

$$= \int (\operatorname{tg} x.\sec^2 x + 3)\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} + 3\operatorname{tg}^{-3} x.\sec^2 x + \operatorname{tg}^{-5} x.\sec^2 x)dx$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + 3\ln(\operatorname{tg} x) - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} + c$$

1352 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}.\cos^3\frac{x}{2}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}.\cos^3\frac{x}{2}} = \int \frac{\csc^2(\frac{x}{2})dx}{\csc^2(\frac{x}{2}).\operatorname{sen}(\frac{x}{2}).\cos^3(\frac{x}{2})} = \int \frac{(1+c\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2}))dx}{c\operatorname{tg}(\frac{x}{2}).\cos^2(\frac{x}{2})}$$

$$= \int \operatorname{tg}(\frac{x}{2}).\sec^2(\frac{x}{2})(1+c\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})dx = \int (\operatorname{tg}\frac{x}{2}.\sec^2\frac{x}{2} + \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}})dx$$

$$= \int (\sec\frac{x}{2}.\operatorname{tg}\frac{x}{2}.\sec\frac{x}{2} + \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}})dx$$

$$= \sec^2\frac{x}{2} + 2\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + c = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} + 2\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + c$$

1353 $\int \frac{\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{4})}{\operatorname{sen}x.\cos x}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{4})}{\operatorname{sen}x.\cos x}dx = \int \frac{\operatorname{sen}x.\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\cos x}{\operatorname{sen}x.\cos x}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{senx+\cos x}{senx.\cos x}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int (\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{senx})dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int (\sec x + \csc x)dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}[\ln|\sec x + \operatorname{tg}x| + \ln|\csc x - c\operatorname{tg}x|] + c$$

NOTA.- $\ln|\csc x - c\operatorname{tg}| = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{1-\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}=\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\csc x-c\operatorname{tg} x$$

análogamente $\quad \ln|\sec x+\operatorname{tg} x|=\ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})|$

1354 $\quad \int\frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x}=\int\csc^5 x\,dx=\int(1+c\operatorname{tg}^2 x)\csc^3 x\,dx$$

$$=\int\csc^3 x\,dx+\int c\operatorname{tg}^2 x.\csc^3 x\,dx \qquad \textbf{... (1)}$$

integrando se tiene:

$$\int\csc^3 x\,dx=\frac{1}{2}[\ln|\csc x-c\operatorname{tg} x|-c\operatorname{tg} x.\csc x]$$

$$\int\csc^3 x\,dx=\frac{1}{2}[\ln|\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}|-c\operatorname{tg} x\csc x]=\frac{1}{2}[\ln|\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}|-c\operatorname{tg} x\csc x]$$

$$=\frac{1}{2}[\ln|\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}|-c\operatorname{tg} x.\csc x]=\frac{1}{2}[\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|-c\operatorname{tg} x.\csc x] \qquad \textbf{... (2)}$$

integrando por partes $\quad \int c\operatorname{tg}^2 x.\csc^3 x\,dx$

$$\begin{cases} u=c\operatorname{tg} x \\ dv=\csc^3 x.c\operatorname{tg} x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} du=-\csc^2 x\,dx \\ v=-\dfrac{\csc^3 x}{3} \end{array}$$

$$\int c\operatorname{tg}^2 x.\csc^3 x\,dx=-\frac{c\operatorname{tg} x.\csc^3 x}{3}-\frac{1}{3}\int\csc^5 x\,dx$$

reemplazando (3), (2) en (1)

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x} = \int \csc^5 dx = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| - \frac{1}{2}c\operatorname{tg} x.\csc x - \frac{c\operatorname{tg} x.\csc^3 x}{3} - \frac{1}{3}\int \csc^5 x dx$$

$$= \int \csc^5 x\,dx = \frac{3}{8}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{4}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x} + c$$

1355 $\int \sec^5 4x\,dx$

Desarrollo

$$\int \sec^5 4x\,dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 4x)\sec^3 4x\,dx = \int \sec^3 4x\,dx + \int \operatorname{tg}^2 4x.\sec^3 4x\,dx \quad \textbf{... (1)}$$

integrando por partes: $\int \sec^3 4x\,dx = \frac{1}{8}[\sec 4x.\operatorname{tg} 4x + \ln|\sec 4x + \operatorname{tg} 4x|]$

integrando por partes: $\int \operatorname{tg}^2 x.\sec^3 4x\,dx = \frac{\operatorname{tg} 4x.\sec^3 4x}{12} - \frac{1}{3}\int \sec^5 4x\,dx$

reemplazando en (1) se tiene:

$$\int \sec^5 4x\,dx = \int \sec^3 4x\,dx + \int \operatorname{tg}^2 4x.\sec^3 4x\,dx$$

$$= \frac{\sec 4x.\operatorname{tg} 4x}{8} + \frac{1}{8}\ln|\sec 4x + \operatorname{tg} 4x| + \frac{\operatorname{tg} 4x.\sec^3 4x}{12} - \frac{1}{3}\int \sec^5 4x\,dx$$

$$\frac{4}{3}\int \sec^5 4x\,dx = \frac{1}{8}\ln|\sec 4x + \operatorname{tg} 4x| + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8\cos^2 4x} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{12\cos^4 4x}$$

$$\int \sec^5 4x\,dx = \frac{3}{32}\ln|\sec 4x + tg 4x| + \frac{3senx}{12} + \frac{sen4x}{16} + c$$

1356 $\int \operatorname{tg}^2 5x\,dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{tg}^2 5x\,dx = \int (\sec^2 5x - 1)dx = \frac{\operatorname{tg} 5x}{5} - x + c$$

1357 $\int c\operatorname{tg}^3 x\,dx$

Desarrollo

$$\int c\operatorname{tg}^3 x\,dx = \int (\csc^2 x - 1)c\operatorname{tg} x\,dx = \int (c\operatorname{tg} x.\csc^2 x - c\operatorname{tg} x)dx$$

$$= -\frac{c\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\operatorname{sen} x| + c$$

1358 $\int c\operatorname{tg}^4 x\,dx$

Desarrollo

$$\int c\operatorname{tg}^4 x\,dx = \int (\csc^2 x - 1)c\operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\csc^2 x.c\operatorname{tg}^2 x - \csc^2 x + 1)dx$$

$$= -\frac{c\operatorname{tg}^3 x}{3} + c\operatorname{tg} x + x + c$$

1359 $\int (\operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3})dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3}dx = \int (\sec^2 \frac{x}{3} - 1)\operatorname{tg}\frac{x}{3}dx = -\frac{3}{3}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} + 3\ln|\cos\frac{x}{3}| \quad \text{... (1)}$$

$$\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3}dx = \int (\sec^2 \frac{x}{3} - 1)\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}dx = \int (\sec^2 \frac{x}{3}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} - \sec^2 \frac{x}{3} + 1)dx \quad \text{... (2)}$$

$$= \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3} + x + c$$

remplazando de (1) y (2) en la integral:

$$\int (\operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3})dx = \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 3\ln|\cos\frac{x}{3}| + x + c$$

1360 $\int x \operatorname{sen}^2 x^2 dx$

Desarrollo

$$\int x \operatorname{sen}^2 x^2 dx = \int x \frac{1-\cos 2x^2}{2} dx = \frac{1}{2}\int (x - x\cos 2x^2)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x^2}{8} + c$$

1361 $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = \int c\operatorname{tg}^2 x.\csc^2 x\, dx = -\frac{c\operatorname{tg}^3 x}{3} + c$$

1362 $\int \operatorname{sen}^5 x.\sqrt[3]{\cos x}\, dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{sen}^5 x.\sqrt[3]{\cos x}\, dx = \int \operatorname{sen}^4 x.\cos^{\frac{1}{3}} x \operatorname{sen} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^{\frac{1}{3}} x.\operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\cos^{\frac{1}{3}} x.\operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \int (\cos^{\frac{1}{3}} x \operatorname{sen} x - 2\cos^{\frac{7}{3}} x.\operatorname{sen} x + \cos^{\frac{13}{3}} x.\operatorname{sen} x)dx$$

$$= -\frac{3}{4}\cos^{\frac{4}{3}} x + \frac{3}{5}\cos^{\frac{13}{3}} x - \frac{3\cos x^{\frac{16}{3}} x}{16} + c$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x} + c$$

1363 $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x.\cos^3 x}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x.\cos^3 x}} = \int \frac{dx}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x.\cos x}} = \int \frac{\sec x\, dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x.\cos x}}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sec x\sqrt{\operatorname{sen} x.\cos x}} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x.\sec^2 x.\cos x}} \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + c$$

1364 $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

Desarrollo

Sea $z^2 = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} z^2$, $dx = \frac{2z\,dz}{1+z^4}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{1}{z}.\frac{2z}{1+z^4}\,dz = 2\int \frac{dz}{z^4+1} \quad \textbf{... (1)}$$

de acuerdo al ejercicio 1294 se tiene:

$$\int \frac{dz}{z^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z^2+\sqrt{2}z+1}{z^2-\sqrt{2}z+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z^2+\sqrt{2}z+1}{z^2-\sqrt{2}z+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1} \quad \textbf{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 2\int \frac{dz}{z^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z^2+\sqrt{2}z+1}{z^2-\sqrt{2}z+1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{2}}{z^2-1} + c \text{ donde } z = \sqrt{\operatorname{tg} x}$$

⑤ INTEGRALES DE LAS FORMAS.-

$$\int \operatorname{sen} mx.\cos nx\,dx\ ,\ \int \operatorname{sen} mx.\operatorname{sen} nx\,dx\ ,\ \int \cos mx.\cos nx\,dx$$

en estos casos es emplean las fórmulas siguientes:

① $\operatorname{sen}(mx).\cos(nx) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$

② $\operatorname{sen}(mx).\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$

③ $\cos(mx).\cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$

Hallar las integrales:

1365 $\int \operatorname{sen} 3x.\cos 5x\,dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{sen} 3x.\cos 5x\,dx = \int \frac{1}{2}[\operatorname{sen} 8x + \operatorname{sen}(-2x)]dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 2x)dx$$

$$= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + c$$

1366 $\int \operatorname{sen} 10x.\operatorname{sen} 15x\,dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{sen} 10x.\operatorname{sen} 15x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x - \cos 25x)dx = \frac{\operatorname{sen} 5x}{10} - \frac{\operatorname{sen} 25x}{50} + c$$

1367 $\int \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{3}\,dx$

Desarrollo

$$\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos\frac{x}{6} + \cos\frac{5}{6}x)dx = \frac{1}{2}(6\,\text{sen}\frac{x}{6} + \frac{6}{5}\,\text{sen}\frac{5}{6}x) + c$$

$$= 3\,\text{sen}\frac{x}{6} + \frac{3}{5}\,\text{sen}\frac{5x}{6} + c$$

1368 $\int \text{sen}\frac{x}{3}.\cos\frac{2x}{3}\,dx$

Desarrollo

$$\int \text{sen}\frac{x}{3}.\cos\frac{2x}{3}\,dx = \frac{1}{2}\int [\text{sen}\,x + \text{sen}(-\frac{x}{3})]dx$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos x + 3\cos\frac{x}{3}) + c = -\frac{\cos x}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{x}{3} + c$$

1369 $\int \cos(ax+b).\cos(ax-b)dx$

Desarrollo

$$\int \cos(ax+b).\cos(ax-b)dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2b + \cos 2ax)dx = \frac{x\cos 2b}{2} + \frac{\text{sen}\,2ax}{4a} + c$$

1370 $\int \text{sen}\,wt.\text{sen}(wt+\psi)dt$

Desarrollo

$$\int \text{sen}\,wt.\text{sen}(wt+\psi)dt = \frac{1}{2}\int (\cos(-\psi) - \cos(2wt+\psi))dt = \frac{t\cos\psi}{2} - \frac{\text{sen}(2wt+\psi)}{4w} + c$$

1371 $\int \cos x.\cos^2 3x\,dx$

Desarrollo

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 6x}{2}$$

$$\int \cos x.\cos^2 3x\,dx = \int \cos x.\frac{1+\cos 6x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos x.\cos 6x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos x + \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 7x))dx = \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{20} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{28} + c$$

1372 $\int \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 3x\,dx$

<u>**Desarrollo**</u>

$$\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x)$$

$$\int \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} x.\cos x - \operatorname{sen} x.\cos 5x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (\operatorname{sen} 2x - \cos 4x + \cos 6x)dx = -\frac{\cos 2x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{24} + c$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 6x}{24} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + c$$

(6) INTEGRALES DE LA FORMA.-

$\boxed{\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx}$, donde R es una función racional.

(1) Valiéndose de la sustitución.-

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\ , \text{ donde } \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

La integral se reduce a integrales de funciones racionales de la nueva variable.

(2) Si se verifica la identidad para reducir la integral a la forma racional se puede emplear la sustitución tg x = t.

Hallar las integrales:

1373 $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

Desarrollo

$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{3+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\frac{\operatorname{tg} x}{2}}{2-\frac{\operatorname{tg} x}{2}}\right| + c$$

donde $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

1374 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x+\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{2t+1-t^2} = 2\int \frac{dt}{(\sqrt{2})^2-(t-1)^2}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t-1}{\sqrt{2}-(t-1)}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}-(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1)}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + c$$

1375 $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx = \int (1-\frac{1}{1+\cos x})dx = x - \int \frac{dx}{1+\cos x} = x - \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = x - \int dt$$

$$= x - \int dt = x - t + c = x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c$$

1376 $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}dx = \int \frac{\operatorname{sen} x(1+\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int (\operatorname{tg} x \sec x + \operatorname{tg}^2 x)dx = \sec x + \operatorname{tg} x - x + c$$

1377 $\int \frac{dx}{8-4\operatorname{sen} x+7\cos x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{8-4\operatorname{sen} x+7\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{8-\frac{8t}{1+t^2}+7-\frac{7t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2-8t+15}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t-4)^2-1} = \ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right| + c = \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + c = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right| + c$$

1378 $\int \frac{dx}{\cos x+2\operatorname{sen} x+3}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 3} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1 - \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(t+1) + c = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1) + c$$

1379 $\int \frac{3\operatorname{sen} x + 2\cos x}{2\operatorname{sen} x + 3\cos x} dx$

Desarrollo

3 sen x + 2 cos x = a(2 sen x + 3 cos x) + B(2 sen x + 3 cos x)

3 sen x + 2 cos x = (2a - 3Bx)sen x + (3a + 2B)cos x

$$\left.\begin{matrix} 2a - 3B = 3 \\ 3a + 2B = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = -\frac{12}{13}, \quad B = -\frac{5}{13}$$

$$\int \frac{3\operatorname{sen} x + 2\cos x}{2\operatorname{sen} x + 3\cos x} dx = \frac{12}{13}\int dx - \frac{5}{13}\int \frac{(2\operatorname{sen} x + 3\cos x)dx}{2\operatorname{sen} x + 3\cos x}$$

$$= \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\operatorname{sen} x + 3\cos x| + c$$

1380 $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx$

Desarrollo

Sea $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx = \int \frac{1+t}{1-t}.\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{t\,dt}{1+t^2} = -\ln(t-1) + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c$$

$$= -\ln|\operatorname{tg} x - 1| + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}^2 x + 1| + c = \frac{1}{2}\ln|\sec^2 x| - \ln|\operatorname{tg} x - 1| + c$$

1381 $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sec^2 x+3} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^2 x+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg} x}{2})+c$$

1382 $\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2 x+5\cos^2 x}$

Desarrollo

Dividiendo el numerador y denominador por $\cos^2 x$.

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x+5\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{3\operatorname{tg}^2 x+5} = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}+c$$

1383 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x}$

Desarrollo

Al igual que el ejercicio anterior dividir por $\cos^2 x$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x-3\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-1}$$

$$\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^2 x+\frac{3}{2}\operatorname{tg} x+\frac{9}{4}-\frac{13}{4}} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{(\operatorname{tg} x+\frac{3}{2})^2-(\frac{\sqrt{13}}{2})^2} = \frac{1}{2.\frac{\sqrt{13}}{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}{\operatorname{tg} x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}\right|+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x+3+\sqrt{13}}\right|+c$$

1384 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x \cos x}$

Desarrollo

Al igual que los casos anteriores.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{(\operatorname{tg} x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - \frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{\operatorname{tg} x - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}}\right| + c = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 5}{\operatorname{tg} x}\right| + c$$

1385 $\int \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^3}\, dx$

Desarrollo

Sea $u = 1 - \cos x \Rightarrow du = \operatorname{sen} x\, dx$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{(1-\cos x)^3} = \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2u^2} + c = -\frac{1}{2(1-\cos x)^2} + c$$

1386 $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{2\operatorname{sen} x.\cos x\, dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$$

Sea $u = 1 + \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow du = 2\operatorname{sen} x.\cos x\, dx$

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|1+\operatorname{sen}^2 x| + c$$

1387 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x+2x\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}$$

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x)^2-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}=2\int \frac{\cos 2x\,dx}{2-\operatorname{sen}^2 2x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\operatorname{sen}2x}{\sqrt{2}-\operatorname{sen}2x}\right|+c$$

1388 $\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen}x+5}$

Desarrollo

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen}x+9-4}=\int \frac{\cos x\,dx}{(\operatorname{sen}x-3)^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}x-3-2}{\operatorname{sen}x-3+2}\right|+c$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}x-5}{\operatorname{sen}x-1}\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{5-\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right|+c$$

1389 $\int \frac{dx}{(2-\operatorname{sen}x)(3-\operatorname{sen}x)}$

Desarrollo

Sea z = sen x de donde se tiene: $\frac{1}{(2-\operatorname{sen}x)(3-\operatorname{sen}x)}=\frac{A}{2-z}+\frac{B}{3-z}$

1 = A(3 – z) + B(2 – z) $\Rightarrow$ 1 = -(A + B) + 3A + 2B, de donde se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A-B=0 \\ 3A+2B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=1,\ B=-1$$

$$\int \frac{dx}{(2-\operatorname{sen}x)(3-\operatorname{sen}x)}=\int \left(\frac{1}{2-\operatorname{sen}x}-\frac{1}{3-\operatorname{sen}x}\right)dx=\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2-\frac{2z}{1+z^2}}-\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3-\frac{2z}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{z^2 - z + 1} - \int \frac{2\,dz}{3z^2 - 2z + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}^2 (\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{2\sqrt{2}}) + c$$

1390 $\int \frac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}\, dx$

Desarrollo

Efectuando la división de: 1 – sen x + cos x entre 1 + sen x – cos x

$$\frac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} = -1 + \frac{2}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}$$

$$\int \frac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}\, dx = \int (-1 + \frac{2}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}) dx = -x + 2\int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1 + \frac{2z}{1+z^2} - 1 + \frac{z^2}{1+z^2}}$$

$$= -x + 4\int \frac{dz}{1 + z^2 + 2z - 1 + z^2} = -x + 4\int \frac{dz}{1 + z^2 + 2z - 1 + z^2} = -x + 2\int \frac{dz}{z^2 + z}$$

$$= -x + 2\int (\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}) dz = -x + 2\ln\left|\frac{z}{z+1}\right| + c = -x + 2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}\right| + c$$

4.10. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS.-

La integración de las funciones hiperbólicas es completamente análoga a la integración de las funciones trigonométricas. Se debe tener presente las fórmulas siguientes:

1. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
2. $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh(2x) + 1)$
3. $\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1)$
4. $\operatorname{senh} x.\cosh x = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x)$

Hallar las integrales.

1391 $\int \operatorname{senh}^3 x\,dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{senh}^3 x\,dx = \int \operatorname{senh}^2 x.\operatorname{senh} x\,dx = \int (\cosh^2 x - 1)\operatorname{senh} x\,dx$$

$$= \int (\cosh^2 x.\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x)dx = \frac{\cosh^3 x}{3} - \cosh x + c$$

1392 $\int \cosh^4 x\,dx$

Desarrollo

$$\int \cosh^4 x\,dx = \int [\frac{1}{2}(\cosh(2x)+1)]^2 dx = \frac{1}{4}\int (\cosh^2(2x) + 2\cosh(2x) + 1)dx$$

$$= \frac{1}{4}[\int \frac{1}{2}(\cosh(4x)+1)dx + \operatorname{senh}(2x) + x] + c$$

$$= \frac{\operatorname{senh}(4x)}{32} + \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{senh}(2x)}{4} + c$$

1393 $\int \operatorname{senh}^3 x.\cosh x\,dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{senh}^3 x.\cosh x\,dx = \frac{\operatorname{senh}^4 x}{4} + c$$

1394 $\int \operatorname{senh}^2 x.\cosh^2 x\,dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{senh}^2 x.\cosh^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cosh(2x)-1)\frac{1}{2}(\cosh(2x)+1)dx = \frac{1}{4}\int(\cosh^2(2x)-1)dx$$

$$= \frac{1}{4}[\int(\frac{1}{2}(\cosh(4x)+1)-1]dx = \frac{1}{4}\int(\frac{\cosh(4x)}{2}-\frac{1}{2})dx = \frac{\operatorname{senh}4x}{32}-\frac{x}{8}+c$$

1395 $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}x.\cosh^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\operatorname{senh}x.\cosh^2 x} = \int \frac{\sec h^2 x}{\operatorname{senh}x}dx = \int \frac{1+\operatorname{tgh}^2 x}{\operatorname{senh}x}dx = \int(\csc hx + \operatorname{tgh}x.\sec hx)dx$$

$$= \ln|\operatorname{tgh}(\frac{x}{2})| + \sec hx + c = \ln|\operatorname{tgh}(\frac{x}{2})| + \frac{1}{\cosh x} + c$$

1396 $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 x.\cosh^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 x.\cosh^2 x} = \int \frac{4\,dx}{\operatorname{senh}^2 2x} = 4\int \csc h^2 2x\,dx = -2c\operatorname{tgh}2x + c$$

1397 $\int \operatorname{tgh}^3 x\,dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{tgh}^3 x\,dx = \int \operatorname{tgh}^2 x.\operatorname{tgh}x\,dx = \int(\sec h^2 x+1)\operatorname{tgh}x\,dx$$

$$= \int(\sec h^2.\operatorname{tgh}x + \operatorname{tgh}x)dx = \ln|\cosh x| + \frac{\operatorname{tgh}^2 x}{2} + c$$

1398 $\int c\operatorname{tgh}^4 x\,dx$

Desarrollo

$$\int c\,\text{tgh}^4 x\,dx = \int (\csc h^2 x + 1)c\,\text{tgh}^2 x\,dx = \int (\csc h^2 x.c\,\text{tgh}^2 x + \csc h^2 x + 1)dx$$

$$= -\frac{c\,\text{tgh}^3 x}{3} - c\,\text{tgh}\,x + x + c$$

1399 $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{senh}^2 x + \cosh^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\text{senh}^2 x + \cosh^2 x} = \int \frac{\sec h^2 x\,dx}{\text{tgh}^2 x + 1} = \text{arctg}(\text{tgh}\,x) + c$$

1400 $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,\text{senh}\,x + 3\cosh x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{2\,\text{senh}\,x + 3\cosh x} = \int \frac{dx}{\frac{2e^x - 2e^{-x}}{2} + \frac{3e^x + 3e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{5e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{e^x}{5e^{2x} + 1}dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}e^x}{5e^{2x} + 1}dx = \frac{2}{\sqrt{5}}\text{arctg}(\sqrt{5}e^x) + c$$

1401 $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{tgh}\,x - 1}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\text{tgh}\,x - 1} = \int \frac{\cosh x}{\text{senh}\,x - \cosh x}dx$$

$\dfrac{1}{\text{senh}\,x - \cosh x} = -(\text{senh}\,x + \cosh x)$, entonces:

$$\int \frac{dx}{\text{tgh}\,x - 1} = \int \frac{\cosh x}{\text{senh}\,x - \cosh x}dx = -\int \cosh(\text{senh}\,x + \cosh x)dx$$

$$= -\int [\operatorname{senh} x.\cosh x + \frac{1}{2}(\cosh 2x+1)]dx = -\frac{\operatorname{senh}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{senh} 2x}{4} - \frac{x}{2} + c$$

1402 $\int \frac{\operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{\cosh 2x}}$

Desarrollo

$$\int \frac{\operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{\cosh 2x}} = \int \frac{\operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{2\cosh^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{2\operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{(\sqrt{2}\cosh x)^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2}\cosh x + \sqrt{2\cosh^2 x + 1}| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2}\cosh x + \sqrt{\cosh 2x}| + c$$

4.11. EMPLEO DE SUSTITUCION TRIGONOMETRICAS E HIPERBOLICAS PARA EL CALCULO DE INTEGRALES DE LA FORMA.-

$$\boxed{\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx} \quad \dots (1)$$

Donde R es una función racional, transformando el trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$, en una suma o resta de cuadrados, reducimos la integral (1) o uno de los integrales de las formas siguientes:

① $\int R(z, \sqrt{m^2 - z^2})dz$ ② $\int R(z, \sqrt{m^2 + z^2})dz$

③ $\int R(z, \sqrt{z^2 - m^2})dz$

Estas integrales se resuelven valiéndose de las sustituciones:

① z = m sen t o z = m tgh t ② z = m tg t o z = m senh t

③ z = m sec t o z = m cosh t

Hallar las integrales

1403 $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

Desarrollo

$3-2x-x^2=4-(x+1)^2$

$$\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{2^2-(x+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}+4\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+c$$

1404 $\int\sqrt{2+x^2}\,dx$

Desarrollo

$$\int\sqrt{2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}+2\ln|\,x+\sqrt{2+x^2}\,|+c$$

1405 $\int\frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$

Desarrollo

Sea $x = 3\operatorname{tg} t \;\Rightarrow\; dx=3\sec^2 t\,dt$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}}=\int\frac{9\operatorname{tg}^2 t.3\sec^2 t\,dt}{\sqrt{9+9\operatorname{tg}^2 t}}=9\int\operatorname{tg}^2 t.\sec t\,dt$$, integrando por partes:

$$=\frac{9}{2}[\operatorname{tg}t.\sec t-\ln|\sec t+\operatorname{tg}t\,|]+c$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}}=9\int\frac{\operatorname{tg}^2 t.\sec^2 t\,dt}{\sec t}=\frac{9}{2}[\operatorname{tg}t.\sec t-\ln|\sec t+\operatorname{tg}t\,|]$$

$$=\frac{9}{2}[\frac{x}{9}\sqrt{9+x^2}-\ln|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}|]=\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln|\,x+\sqrt{9+x^2}\,|+c$$

1406 $\int \sqrt{x^2-2x+2}dx$

Desarrollo

$$\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx = \int \sqrt{(x-1)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+2}|+c$$

1407 $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$

Desarrollo

$$\int \sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-4} - 4\ln|x+\sqrt{x^2-4}|] = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+c$$

1408 $\int \sqrt{x^2+x}\,dx$

Desarrollo

$$\int \sqrt{x^2+x}\,dx = \int \sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}\,dx = \int \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}((x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{4}\ln[x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}])$$

$$= \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|+c$$

1409 $\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx$

Desarrollo

$$\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx = \int \sqrt{(x^2-6x+9)-16}\,dx = \int \sqrt{(x-3)^2-16}\,dx$$

$$= \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7} - 8\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}| + c$$

1410 $\int (x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$

Desarrollo

$$\int (x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx = \int (x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int [(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

Sea $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta$

$$\int (x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx = \int [(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \int [\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\theta+\frac{3}{4}]\sqrt{\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\theta+\frac{3}{4}}.\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\int \sec^2\theta.\frac{\sqrt{3}}{2}\sec\theta.\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{9}{16}\int \sec^5\theta\,d\theta = \frac{9}{16}\int (\sec^3\theta+\sec^3\theta.\operatorname{tg}^2\theta)d\theta \qquad \textbf{... (1)}$$

integrando por partes $\int \sec^3\theta\,d\theta$, es decir:

$$\int \sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}[\operatorname{tg}\theta.\sec\theta+\ln|\sec\theta+\operatorname{tg}\theta|] \qquad \textbf{... (2)}$$

integrando por partes $\int \sec^3\theta.\operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$

$$\begin{cases} u = \operatorname{tg}\theta \\ dv = \sec^3\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \sec^2\theta\, d\theta \\ v = \dfrac{\sec^3\theta}{3} \end{cases}$$

$$\int \sec^3\theta.\operatorname{tg}^2\theta\, d\theta = \operatorname{tg}\theta.\frac{\sec^3\theta}{3} - \frac{1}{3}\int \sec^5\theta\, d\theta \qquad \textbf{... (3)}$$

reemplazando (3), (2) en (1):

$$= \frac{9}{16}.\frac{3}{4}[\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\theta.\sec\theta + \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|) + \frac{\operatorname{tg}\theta.\sec^3\theta}{3}] + c$$

$$= \frac{27}{64}[\operatorname{tg}\theta.\sec\theta(\frac{1}{2} + \frac{\sec^2\theta}{3}) + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|] + c$$

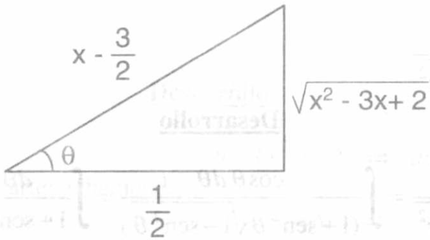
$$= \frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{27}{128}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}| + c$$

1411 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$

Desarrollo

$x^2 - 3x + 2 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$; $\sec\theta = 2x - 3$

$\frac{1}{2}\sec\theta.\operatorname{tg}\theta = dx$; $x - 1 = \frac{\sec\theta + 1}{2}$; $x - \frac{3}{2} = \frac{\sec\theta}{2}$



$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}}=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta}d\theta}{\frac{\sec\theta+1}{2}\sqrt{\frac{\sec^2\theta-1}{4}}}=\int\frac{\sec\theta\,d\theta}{1+\sec\theta}=2[\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}]+c=2\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}+c$$

1412 $\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}$

Desarrollo

$x^2-2x+5=(x-1)^2+4$

$$\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{dx}{((x-1)^2+4)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(4\,\text{tg}^2\theta+4)^{\frac{3}{2}}}$$

donde $x-1=2\,\text{tg}\,\theta$; $dx=2\sec^2\theta\,d\theta$

$$=\int\frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(2\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{2\sec^2\theta}{8\sec^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\text{sen}\,\theta+c$$

$$=\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}+c$$

1413 $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{(1+\text{sen}^2\theta\sqrt{1-\text{sen}^2\theta})}=\int\frac{d\theta}{1+\text{sen}^2\theta}$$

$$= \int \frac{d\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{2\operatorname{tg}^2\theta + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}{(\sqrt{2tg\theta})^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2tg\theta}) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{1-x^2}}) + c$$

1414 $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$

Desarrollo

$\operatorname{tg}\theta = x \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(1-\operatorname{tg}^2\theta)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(1-\operatorname{tg}^2\theta)\sec\theta}$$

$$= \int \frac{\sec\theta\, d\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{1-2\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta}{1-(\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2x}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2x}} \right| + c$$

4.12. INTEGRACIÓN DE DIVERSAS FUNCIONES TRASCENDETES.-

Hallar las integrales.-

1415 $\int (x^2+1)^2 e^{2x} dx$

Desarrollo

Integrando por partes y haciendo $\begin{cases} u = (x^2+1)^2 \Rightarrow du = 4x(x^2+1)dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$$\int (x^2-1)^2 e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}(x^2+1)^2 - 2\int x(x+1)e^{2x}dx \qquad \text{... (1)}$$

integrando $\int x(x^2+1)e^{2x}dx$ por partes

haciendo: $\begin{cases} u = x(x^2+1) & \Rightarrow \quad du = (3x^2+1)dx \\ dv = e^{2x}dx & \Rightarrow \quad v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$$\int x(x^2+1)e^{2x}dx = x(x^2+1)\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{3x^2+1}{2}e^{2x}dx \qquad \text{... (2)}$$

integrando $\int \frac{3x^2+1}{2}e^{2x}dx$ por partes

haciendo $\begin{cases} u = \dfrac{3x^2+1}{2} & \Rightarrow \quad du = 3x\,dx \\ dv = e^{2x}dx & \Rightarrow \quad v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$$\int \frac{3x^2+1}{2}e^{2x}dx = \frac{3x^2+1}{3}e^{2x} - \frac{3}{2}\int xe^{2x}dx \qquad \text{... (3)}$$

integrando $\int xe^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$ ... (4)

reemplazando (4) en (3):

$$\int \frac{3x^2+1}{2}e^{2x}dx = \frac{3x^2+1}{4}e^{2x} - \frac{3}{4}xe^{2x} + \frac{3}{8}e^{2x}$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}(3x^2+1-3x+\frac{3}{2}) = \frac{e^{2x}}{8}(6x^2-6x+5)$$

reemplazando en (2)

$$\int x(x^2+1)e^{2x}dx = x(x^2+1)\frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}(6x^2-6x+5) = \frac{e^{2x}}{2}(2x^3-3x^2+4x-\frac{5}{2})$$

reemplazando en (1) se tiene:

$$\int (x^2+1)^2 e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}(x^2+1)^2-\frac{e^{2x}}{2}(2x^3-3x^2+4x-\frac{5}{2})+c$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}(x^4-2x^3+5x^2-4x+\frac{7}{2})+c$$

1416 $\int x^2\cos^2(3x)dx$

Desarrollo

$$\int x^2\cos^2 3x\,dx = \int x^2(\frac{1+\cos 6x}{2})dx = \frac{1}{2}\int (x^2+x^2\cos 6x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3}+\int x^2\cos 6x\,dx) \quad \textbf{... (1)}$$

integrando $\int x^2\cos 6x\,dx$ se tiene: $\begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = \cos(6x)dx & \Rightarrow v = \frac{sen 6x}{6} \end{cases}$

$$\int x^2\cos 6x\,dx = \frac{x^2\,\text{sen}\,6x}{6}-\int \frac{x}{3}\text{sen}\,6x\,dx = \frac{x^2 6\,\text{sen}\,6x}{6}+\frac{x}{18}\cos 6x-\frac{\text{sen}\,6x}{216} \quad \textbf{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1)

$$\int x^2\cos^2 3x\,dx = \frac{x^3}{6}+\frac{x^2\,\text{sen}\,6x}{12}+\frac{x}{36}\cos 6x-\frac{\text{sen}\,6x}{432}+c$$

$$=\frac{1}{6}(x^3+\frac{x^3}{2}\text{sen}\,6x+\frac{x}{6}\cos 6x-\frac{\text{sen}\,6x}{72})+c$$

1417 $\int x \operatorname{sen} x.\cos 2x\,dx$

Desarrollo

$$\operatorname{sen} x \cos 2x = \frac{1}{2}[\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}(-x)] = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x)$$

$$\int x \operatorname{sen} x.\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int x(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x)dx$$

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = (\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x)dx & \Rightarrow \quad v = \cos x - \dfrac{\cos 3x}{3} \end{cases}$$

$$\int x \operatorname{sen} x.\cos x\,dx = \frac{1}{2}[x\cos x - \frac{x}{3}\cos 3x] - \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{18} + c$$

1418 $\int e^{2x} \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Desarrollo

$$\int e^{2x} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int e^{2x}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (e^{2x} - e^{2x}\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}[\int e^{2x}dx - \int e^{2x}\cos 2x]dx = \frac{e^{2x}}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{8}.e^{2x} - \frac{\cos 2x}{8}.e^{2x} + c$$

$$= \frac{e^{2x}}{8}(2 - \operatorname{sen} 2x - \cos 2x) + c$$

1419 $\int e^{x} \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 3x\,dx$

Desarrollo

$$\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 3x\,dx = \frac{1}{2}\int e^x(\cos 2x - \cos 4x)dx \qquad \textbf{... (1)}$$

Sea $\begin{cases} u = e^x & \Rightarrow \quad du = e^x dx \\ dv = \cos 2x\,dx & \Rightarrow \quad v = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} \end{cases}$

$$\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{e^x \operatorname{sen} 2x}{2} - \int \frac{e^x \operatorname{sen} 2x\,dx}{2}$$

$$= \frac{e^x \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{e^x}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx$$

$$\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{e^x}{4}(2\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)\frac{4}{5} = \frac{e^x}{5}(2\operatorname{sen} 2x + \cos 2x) \qquad \textbf{... (2)}$$

en forma análoga para: $\displaystyle\int e^x \cos 4x\,dx = \frac{e^x}{17}(4\operatorname{sen} 4x + \cos 4x)$ **... (3)**

reemplazando (3), (2) en (1):

$$\int e^x \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 3x\,dx = \frac{e^x}{2}\left(\frac{2\operatorname{sen} 2x + \cos x}{5} - \frac{4\operatorname{sen} 4x + \cos 4x}{17}\right) + c$$

1420 $\displaystyle\int xe^x \cos x\,dx$

<u>**Desarrollo**</u>

$\begin{cases} u = xe^x & \Rightarrow \quad du = (e^x + xe^x)dx \\ dv = \cos x\,dx & \Rightarrow \quad v = \operatorname{sen} x \end{cases}$

$$\int xe^x \cos x\,dx = xe^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx - \int xe^x \operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{... }(\alpha)$$

integrando $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$ ... **(1)**

integrando $\int xe^x \operatorname{sen} x\,dx$, se tiene: $\begin{cases} u = xe^x & \Rightarrow \quad du = (xe^x + e^x)dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx & \Rightarrow \quad v = -\cos x \end{cases}$

$$\int xe^x \operatorname{sen} x\,dx = -xe^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx + \int xe^x \cos x\,dx$$

$$= -xe^x \cos x + \frac{e^x}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x + \int xe^x \cos x\,dx) \qquad \textbf{... (2)}$$

reemplazando (2), (1) en (α)

$$\int xe^x \cos x\,dx = xe^x senx - \frac{e^x}{2}(senx - \cos x) + xe^x \cos x -$$

$$-\frac{e^x}{2}(\cos x + senx) - \int xe^x \cos x\,dx$$

$$2\int xe^x \cos x\,dx = xe^x(\operatorname{sen} x + \cos x) - e^x \operatorname{sen} x$$

$$\int xe^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}[x(\operatorname{sen} x + \cos x) - \operatorname{sen} x] + c$$

1421 $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \int \frac{dx}{(e^x + 2)(e^x - 1)} = -\frac{1}{3}\int (\frac{1}{e^x + 2} - \frac{1}{e^x - 1})dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int (\frac{e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}})dx = \frac{1}{6}\ln(1 + 2e^x) + \frac{1}{3}\ln(1 - e^{-x}) + c$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\ln(e^x + 2) + \frac{1}{3}\ln(e^x - 1) + c$$

1422 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x} + e^{-x} + 1}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{(e^{-x} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$= -\int \frac{-e^{-x}dx}{\sqrt{(e^{-x} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = -\ln|e^{-x} + \frac{1}{2} + \sqrt{e^{-2x} + e^{-x} + 1}| + c$$

$$= -\ln|\frac{e^x + 2 + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}{2e^x}| + c = x - \ln|e^x + 2 + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}| + c$$

1423 $\int x^2 \ln\frac{1+x}{1-x}dx$

Desarrollo

$$\text{Haciendo } \begin{cases} u = \ln\frac{1+x}{1-x} & \Rightarrow \quad du = \frac{2\,dx}{1-x^2} \\ dv = x^2dx & \Rightarrow \quad v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\int x^2 \ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{x^3}{3}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{2}{3}\int \frac{x^3}{1-x^2}dx = \frac{x^3}{3}\ln|\frac{1+x}{1-x}| - \frac{2}{3}\int(-x + \frac{x}{1-x^2})dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3}\ln|1-x^2| + c = \frac{1}{3}[x^3\ln|\frac{1+x}{1-x}| + \ln|1-x^2|] + c$$

1424 $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) \Rightarrow du=\dfrac{2\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases}$

$$\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad \ldots (1)$$

integrando $\int \dfrac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

haciendo $\begin{cases} u=\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \Rightarrow du=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow v=\sqrt{1+x^2} \end{cases}$

$$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x \quad \ldots (2)$$

reemplazando (2) en (1):

$$\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - 2x + c$$

1425 $\int x\arccos(5x-2)dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u=\arccos(5x-2) \Rightarrow du=-\dfrac{5\,dx}{\sqrt{1-(5x-2)^2}} \\ dv=x\,dx \Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int x\arccos(5x-2)dx=\frac{x^2}{2}\arccos(5x-2)+\frac{5}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-(5x-2)^2}} \qquad \textbf{... (1)}$$

integrando $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-(5x-2)^2}}$ tomando sen $\theta = 5x-2 \Rightarrow dx=\dfrac{\cos\theta}{5}d\theta$

$\cos\theta=\sqrt{1-(5x-2)^2}$ como sen $\theta = 5x-2 \Rightarrow x=\dfrac{\operatorname{sen}\theta+2}{5}$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-(5x-2)^2}}=\int\frac{(\operatorname{sen}\theta+\frac{2}{5})^2\frac{\cos\theta}{5}d\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}=\frac{1}{125}\int(\operatorname{sen}^2\theta+4\operatorname{sen}\theta+4)d\theta$$

$$=\frac{1}{125}\int(\frac{1-\cos 2\theta}{2}+4\operatorname{sen}\theta+4)d\theta=\frac{1}{125}(\frac{9\theta}{2}-\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}-4\cos\theta)+c$$

$$=\frac{1}{125}(\frac{9}{2}\arccos(5x-2)-\frac{5x+6}{2}\sqrt{1-(5x-2)^2}) \qquad \textbf{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1).

$$\int x\arccos(5x-2)dx=\frac{x^2}{2}\arccos(5x-2)+\frac{1}{50}(\frac{9arcsen(5x-2)}{2}-$$

$$-\frac{5x+6}{2}\sqrt{20x-25x^2-3})+c$$

1426 $\displaystyle\int \operatorname{sen}x.\operatorname{senh}x\,dx$

<u>**Desarrollo**</u>

$$\int \operatorname{sen} x.\operatorname{senh} x\,dx = \int \operatorname{sen} x.\frac{e^x - e^{-x}}{2}dx = \frac{1}{2}\int (e^x \operatorname{sen} x - e^{-x}\operatorname{sen} x)dx$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2}e^x - (-\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2})e^{-x}] + c$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\operatorname{sen} x - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cos x) + c$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x.\cosh x - \cos x.\operatorname{senh} x) + c$$

4.13. EMPLEO DE LAS FÓRMULAS DE REDUCCIÓN.-

Deducir las fórmulas de reducción de las integrales

1427 $$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}(\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}) + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int (\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}})$$

$n \neq 1$ Hallar I_2 e I_3

Desarrollo

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}[\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^n}dx - \int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^n}]$$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad \textbf{... (1)}$$

calcular la integral

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} \text{ por partes } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{cases}$$

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}=-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\int\frac{dx}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \quad ...(2)$$

reemplazando (2) en (1)

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{x}{2a(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$=(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2a^2(n-1)})\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)}$$

$$=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a})+c$$

$$I_3=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}=\frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}=\frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^3}+\frac{3}{4a^2}(\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a})+c$$

1428 $I_n=\int \operatorname{sen}^n x\,dx=-\frac{\operatorname{sen}^{n-1}x.\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}dx$. Hallar I_4, I_5

Desarrollo

$$I_n=\int \operatorname{sen}^n x\,dx=\int \operatorname{sen}^{n-1}x.\operatorname{sen}x\,dx$$

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen}^{n-1} x \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\, dx \\ v = -\cos x \end{array}$$

$$I_n = \int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x.\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x.\cos^2 x\, dx$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x.\cos x + (n-1)[\int \operatorname{sen}^{n-2} x.(1-\operatorname{sen}^2 x)dx]$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x.\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx$$

$$n\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x.\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

$$\therefore \quad I_n = \int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

$$I_4 = \int \operatorname{sen}^4 x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^3 x.\cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{1}{2}x\right) + c$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{4} - \frac{3}{8}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{3x}{8} + c$$

$$I_5 = \int \operatorname{sen}^5 x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5}\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^4 x.\cos x}{5} - \frac{4}{5}\left(-\frac{\operatorname{sen}^2 x.\cos x}{3} + \frac{2}{3}\int \operatorname{sen} x\, dx\right)$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^4 x.\cos x}{5} - \frac{4}{15}\operatorname{sen}^2 x.\cos x - \frac{8}{15}\cos x + c$$

1429 $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$, Hallar: I_3, I_4

Desarrollo

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\sec^{n-2} x\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} + \int \operatorname{tg}^2 x.\sec^{n-2} x\,dx \qquad \text{... (1)}$$

integrando por partes $\int \operatorname{tg}^2 x.\sec^{n-2} x\,dx$

$$\begin{cases} u = \operatorname{tg} x \\ dv = \sec^{n-2} x.\operatorname{tg} x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \sec^2 x\,dx \\ v = \dfrac{\sec^{n-2} x}{n-2} \end{cases}$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x.\sec^{n-2} x\,dx = \frac{\operatorname{tg} x.\sec^{n-1} x}{n-2} - \int \frac{\sec^n x\,dx}{n-2} \qquad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \sec^n x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} + \frac{\operatorname{tg} x.\sec^{n-1} x}{n-2} - \int \frac{\sec^n x\,dx}{n-2}$$

$$\int \sec^n x\,dx + \frac{1}{n-2}\int \sec^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-2)\cos^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$\frac{n-1}{n-2}\int \sec^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-2)\cos^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

1430 $I_n=\int x^n e^{-x}dx=-x^n e^{-x}+n\int x^{n-1}e^{-x}dx$. Hallar I_{10}

Desarrollo

$I_n=\int x^n e^{-x}dx$, integrando por partes: $\begin{cases} u=x^n & \Rightarrow & du=nx^{n-1}dx \\ dv=e^{-x}dx & \Rightarrow & v=-e^{-x} \end{cases}$

$$I_n=\int x^n e^{-x}dx=-x^n e^{-x}+n\int x^{n-1}e^{-x}dx$$

$$I_{10}=\int x^{10}e^{-x}dx=-x^{10}e^{-x}+10\int x^9 e^{-x}dx=-x^{10}e^{-x}+10(-x^9 e^{-x}+9\int x^9 e^{-x}dx)$$

$$=-x^{10}e^{-x}-10x^9 e^{-x}+90+\int x^9 e^{-x}dx=-x^{10}-10x^9-90x^8-720x^7+\ldots+c$$

4.14. INTEGRACIÓN DE DISTINTAS FUNCIONES.-

1431 $\int\frac{dx}{2x^2-4x+9}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{2x^2-4x+9}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-2x+\frac{9}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2+\frac{7}{2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}})+c$$

1432 $\int\frac{x-5}{x^2-2x+2}dx$

Desarrollo

$$\int\frac{x-5}{x^2-2x+2}dx=\int\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx-4\int\frac{dx}{x^2-2x+2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2|-4\operatorname{arctg}(x-1)+c$$

1433 $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{x^2+x+\frac{1}{2}}$

Desarrollo

$$\int\frac{x^3dx}{x^2+x+\frac{1}{2}}=\int[(x-1)+\frac{1}{2}(\frac{x+1}{x^2+x+\frac{1}{2}})]dx$$

$$=\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{4}\int\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{4}\ln|x^2+x+\frac{1}{2}|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1)...+c$$

1434 $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2+5)}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{x(x^2+5)}=\int(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5})dx \quad ; \quad \frac{1}{x(x^2+5)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5}$$

efectuando operaciones y simplificando

$1=(A+B)x^2+Cx+5A$, de donde $A=\frac{1}{5}$, $B=-\frac{1}{5}$, C = 0. Luego:

$$\int\frac{dx}{x(x^2+5)}=\int(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5})dx=\frac{1}{5}\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+5})dx$$

$$=\frac{1}{5}(\ln x-\frac{1}{2}\ln|x^2+5|)+c=\frac{1}{4}(\frac{2\ln x-\ln(x^2+5)}{2})+c$$

$$=\frac{1}{5}(\frac{\ln x^2-\ln(x^2+5)}{2})+c=\frac{1}{5}\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}}+c$$

1435 $\int\frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}$

Desarrollo

Sea $u = x + 2$; $u + 1 = x + 3 \Rightarrow du = dx$

$$\int\frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}=\int\frac{du}{u^2(u+1)^2}=\int(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{2}{u^2+u})du$$

$$=-\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-2\ln|\frac{u}{u+1}|+c=2\ln|\frac{u+1}{u}|-\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}+c$$

$$=2\ln|\frac{x+3}{x+2}|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+c$$

1436 $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}=\int(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1})dx$$

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

efectuando operaciones y simplificando

$$1=(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+A+B+D$$

resolviendo el sistema $\begin{cases}A+C=0\\A+B+2C+D=0\\A+C+2D=0\\A+B+D=1\end{cases}$

se tiene: $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$, D = 0

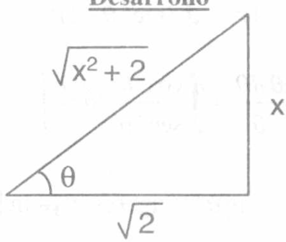
$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}=\int(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+1})dx=\frac{1}{2}(\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1))+c$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}|-\frac{1}{x+1})+c$$

1437 $\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}$

Desarrollo



$$x=\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta \quad\Rightarrow\quad dx=\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=\int\frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta}{4(\operatorname{tg}^2\theta+1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

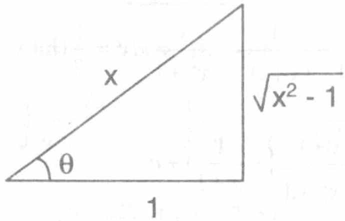
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}(\theta+\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{4})+c=\frac{\sqrt{2}}{8}(\operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{2}})+\frac{x\sqrt{2}}{x^2+2})+c$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{2}})+\frac{x}{x^2+2})+c$$

1438 $\int \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{(x^4 - 2x^2 + 1)} = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$$



$\sec\theta = x \quad \Rightarrow \quad dx = \sec\theta .\ tg\,\theta\, d\theta$

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + 1} = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} = \int \frac{\sec\theta\, tg\,\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta - 1)^2}$$

$$\int \frac{\sec\theta\, tg\,\theta\, d\theta}{tg^4\theta} = \int \frac{\sec\theta\, d\theta}{tg^3\theta} = \int \frac{\cos^2\theta}{sen^3\theta} d\theta = \int \frac{1 - sen^2\theta}{sen^3\theta} d\theta = \int (\csc^3\theta - \csc\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}[\ln|\csc\theta - c\,tg\,\theta| - c\,tg\,\theta \csc\theta] - \ln|\csc\theta - c\,tg\,\theta| + c$$

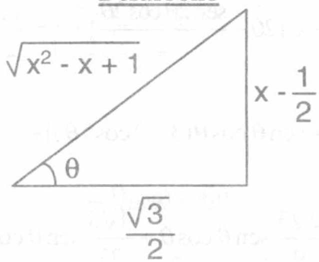
$$= -\frac{1}{2}[\ln|\csc\theta - c\,tg\,\theta| + c\,tg\,\theta . \csc\theta] + c$$

$$= -\frac{1}{2}[\ln|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}| + \frac{x}{x^2-1}] + c = -\frac{1}{2}[\ln\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x}{x^2-1}] + c$$

$$= -\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}| + \frac{x}{x^2-1}] + c = \frac{1}{4}[\ln|\frac{x+1}{x-1}| + \frac{2x}{1-x^2}] + c$$

1439 $\int \frac{x\,dx}{(x^2 - x + 1)^3}$

Desarrollo



$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-x+1)^3} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^3} + \frac{1}{x^2-x+1)^3}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{4(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^3} \quad \textbf{... (1)}$$

integrando $\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^3}$

completando cuadrados se tiene: $x^2-x+1 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^3} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta}{(\frac{3}{4}tg^2\theta+\frac{3}{4})^3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\frac{27}{64}\sec^6\theta}$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{27}\int \cos^4\theta\,d\theta = \frac{16\sqrt{3}}{27}\int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{27}\int (1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta = \frac{4\sqrt{3}}{27}[\theta+\operatorname{sen} 2\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen} 4\theta}{8}]+c$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{27}[\frac{3\theta}{2}+\operatorname{sen}2\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta\cos2\theta}{4}]+c=\frac{4\sqrt{3}}{27}[\frac{3\theta}{2}+\operatorname{sen}2\theta(\frac{4+\cos2\theta}{4})]+c$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{27}[3\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta(3+2\cos^2\theta)]+c$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\theta+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{4\sqrt{3}}{27}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2\theta$$

$$=\frac{2}{23\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+\frac{2x-1}{6(x^2-x+1)}+\frac{2x-1}{12(x^2-x+1)^2} \qquad \textbf{... (2)}$$

remplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^3}=-\frac{1}{4(x^2-x+1)^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+\frac{2x-1}{6(x^2-x+1)}+\frac{2x-1}{12(x^2-x+1)^2}+c$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2-x+1)^3}=\frac{x-2}{6(x^2-x+1)^2}+\frac{2x-1}{6(x^2-x+1)^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$$

1440 $\int\frac{(3-4x)}{(1-2\sqrt{x})^2}dx$

Desarrollo

Sea $z^2=x \Rightarrow$ dx = 2z dz

$$\int\frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}=\int\frac{(3-4z^2)}{(1-2z)^2}2z\,dz=-\int\frac{8z^3-6z}{4z^2-4z+1}dz=-\int(2z+2-\frac{2}{(1-2z)^2})dz$$

$$=-(z^2-2z-\frac{1}{1-2z})=-\frac{(-3x-2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-1)}{1-2\sqrt{x}}+c$$

$$=\frac{3x+2x\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}+\frac{1-2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}+c=\frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}+1+c$$

$$\therefore \quad \int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}dx = \frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}+k$$

1441 $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3}dx = \int \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x^3}dx = \int (\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^{\frac{5}{2}}}+\frac{1}{x^3})dx = -\frac{1}{x}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^2}+c$$

1442 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \ln|\,x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\,|+c$$

1443 $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx = \int [(2x)^{-\frac{1}{2}}-(2x)^{\frac{1}{6}}]dx = \sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}+c$$

1444 $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}$

Desarrollo

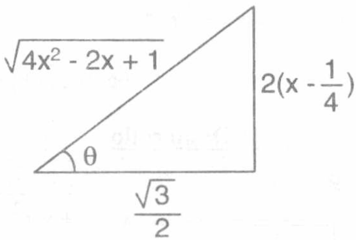
$$\text{Sea } \begin{cases} x = z^6 \;\Rightarrow\; dz = 3z^2dz \\ x = z^3 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{x^2} = z^2 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{x} = z \end{cases}$$

$$\int \frac{dz}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2} = \int \frac{3z^2 dz}{(z^2+z)^2} = 3\int \frac{dz}{(z+1)^2} = -\frac{3}{z+1} = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1} + c$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2} = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1} + c$$

1445 $\displaystyle\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}$

Desarrollo



$$4x^2-2x+1 = 4(x-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4} \quad ; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{2(x-\frac{1}{4})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4x-1}{\sqrt{3}}$$

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\sec^2\theta\, d\theta \quad ; \quad 2x+1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\operatorname{tg}\theta+\sqrt{3})$$

$$\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\operatorname{tg}\theta+\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{4}\sec^2\theta\, d\theta}{\frac{3\sqrt{3}}{8}\sec^3\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{(tg\theta+\sqrt{3})}{\sec\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int sen\theta + \sqrt{3}\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\int (\operatorname{sen}\theta+\sqrt{3}\cos\theta)d\theta$$

$= -\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}} + \operatorname{sen}\theta + c$, efectuando la función trigonométrica tenemos:

$$= -\frac{1}{2\sqrt{4x^2-2x+1}} + \frac{4x-1}{2\sqrt{4x^2-2x+1}} + c$$

$$= \frac{4x-2}{2\sqrt{4x^2-2x+1}} + c = \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}} + c$$

1446 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$

Desarrollo

Sea $5-x = z^4 \Rightarrow dx = -4z^3 dz$

$\sqrt[4]{5-x} = z$ y $\sqrt{5-x} = z^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}} = -4\int \frac{z^3 dz}{z^2+z} = -4\int \frac{z^2 dz}{z+1} = -4\int (z-1+\frac{1}{z+1})dz$$

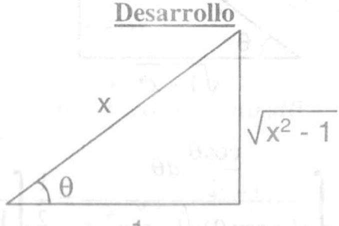
$$= -4(\frac{z^2}{2} - z + \ln|z+1|) + c = \underline{-2z^2 + 4z - 4\ln|z+1| + c}$$

$$= -2\sqrt{5-x} + 4\sqrt[4]{5-x} - 4\ln|\sqrt[4]{5-x}+1| + c$$

$$= -2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2 - 4\ln|\sqrt[4]{5-x}+1| + k$$

1447 $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

Desarrollo



Sea $x = \sec\theta \Rightarrow dx = \sec\theta.\ \text{tg}\,\theta\, d\theta$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = \int \frac{\sec^2\theta.\sec\theta.\text{tg}\,\theta\, d\theta}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)^3}} = \int \frac{\sec^3\theta.\text{tg}\,\theta}{\text{tg}^3\,\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^3\theta\, d\theta}{\text{tg}^2\,\theta} = \int \sec^3\theta.c\,\text{tg}^2\,\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\text{sen}^2\,\theta} d\theta$$

$$= \int \sec\theta.\csc^2\theta\, d\theta = \int \sec\theta(1+c\,\text{tg}^2\,\theta)d\theta$$

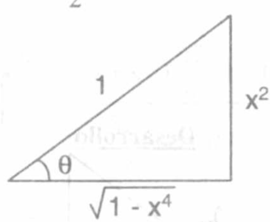
$$= \int (\sec\theta + \sec\theta.c\,\text{tg}^2\,\theta)d\theta = \int (\sec\theta + \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\,\theta})d\theta$$

$$= \ln|x+\sqrt{x^2-1}| - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + c$$

1448 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$

Desarrollo

Sea $x^2 = \text{sen}\,\theta$; $x\,dx = \dfrac{\cos\theta}{2} d\theta$



$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{\frac{\cos\theta}{2} d\theta}{(1+\text{sen}\,\theta)\sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{1+\text{sen}\,\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int(\sec^2\theta-tg\theta.\sec\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(tg\theta-\sec\theta)+c=-\frac{1}{2}(\sec\theta-\operatorname{tg}\theta)+c=-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}})+c$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^4}}+c=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}+c=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}+c$$

1449 $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$

Desarrollo

$$1-2x^2-x^4=2-(x^2+1)^2$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2-(x^2+1)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{2-(x^2+1)^2}}=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{x^2+1}{\sqrt{2}})+c$$

1450 $\int\frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

Desarrollo

Sea $x=\operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx=\sec^2\theta\,d\theta$

$$\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{(\operatorname{tg}\theta+1)\sec^2\theta\,d\theta}{(\operatorname{tg}^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{(\operatorname{tg}\theta+1)\sec^2\theta}{\sec^3\theta}d\theta \qquad \text{... (1)}$$

$$=\int\frac{\operatorname{tg}\theta+1}{\sec\theta}d\theta=\int(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)d\theta=\operatorname{sen}\theta-\cos\theta+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+c=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+c$$

1451 $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}$

Desarrollo

$$\frac{1}{x^2+4x}=\frac{1}{4}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4})$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{4-x^2}} \qquad \text{... (1)}$$

integrando $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$. Sea $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}+2}{x}\right| \qquad \text{... (2)}$$

integrando $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{4-x^2}}$. Sea $x+4=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{4-x^2}}=\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{4-(1-\frac{1-4t}{t})^2}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{-12t^3+8t-1}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{3}-[2\sqrt{3}(t-\frac{1}{3})]^2}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}(6t-2)$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}(\frac{-(2x+2)}{x+4})=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}(\frac{2(x+1)}{x+4}) \qquad \text{... (3)}$$

reemplazando (3), (2) en (1)

$$\int\frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{4-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}+2}{x}\right|-\frac{1}{8\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2(x+1)}{x+4}\right)$$

1452 $\int\sqrt{x^2-9}\,dx$

Desarrollo

$$\int\sqrt{x^2-9}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-9}-9\ln|x+\sqrt{x^2-9}|+c$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}|+c$$

1453 $\int\sqrt{x-4x^2}\,dx$

Desarrollo

$$\int\sqrt{x-4x^2}\,dx=\int\sqrt{\frac{1}{16}-4(x-\frac{1}{8})^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1}{16}-4(x-\frac{1}{8})^2}\,2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}((2x-\frac{1}{4})\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{16}\operatorname{arcsen}(8x-1))]$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{8x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{16}\operatorname{arcsen}(8x-1))+c$$

$$=\frac{8x-1}{16}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{64}\operatorname{arcsen}(8x-1)+c$$

1454 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

Desarrollo

$$x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=\frac{-dt}{t^2}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{t^2+t+\frac{1}{t}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\ln|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}|=-\ln|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}|+c$$

$$=-\ln|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{2x}|+c=\ln|\frac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}|+c$$

1455 $\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$

Desarrollo

$$\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx=\int x\sqrt{(x+1)^2+1}dx$$

Sea $\begin{cases} z=x+1 \Rightarrow dx=dz \\ z=x+1 \Rightarrow x=z-1 \end{cases}$

$$\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx=\int x\sqrt{(x+1)^2+1}\,dx=\int(z-1)\sqrt{z^2-1}\,dz$$

$$\int z\sqrt{z^2+1}\,dz-\int\sqrt{z^2+1}\,dz=\frac{1}{2}\frac{(z^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}}-\frac{z}{2}\sqrt{z^2+1}-\frac{1}{2}\ln|z+\sqrt{z^2+1}|+c$$

$$=\frac{(z^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{z}{2}\sqrt{z^2+1}-\frac{1}{2}\ln|z+\sqrt{z^2+1}|+c$$

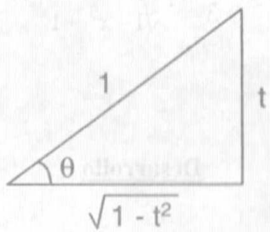
$$= \frac{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}{3} - \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|+c$$

1456 $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

Desarrollo

Sea $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^4}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}} = -\int \frac{t^3 dt}{\sqrt{1-t^2}}$$; sea $t = \text{sen}\,\theta$; $dt = \cos\theta\, d\theta$



$$\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{t^3 dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{\text{sen}^3\theta.\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = -\int \text{sen}^3\theta\, d\theta$$

$$= -\int (1-\cos^2\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta = -(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}) + c$$

$$= \cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} + c = \sqrt{1-t^2} - \frac{\sqrt{(1-t^2)^3}}{3} + c$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3} + c$$

1457 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$

Desarrollo

Sea $\begin{cases} 1-x^3 = z^2 \Rightarrow dx = -\dfrac{2z\,dz}{3x^2} \\ \dfrac{dx}{x} = -\dfrac{2z\,dz}{3-3z^2} \end{cases}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}x} = \int \frac{-2z\,dz}{z(3-3z^2)} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2-1}$$

$$= \frac{2}{3}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c = \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right| + c$$

1458 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}dx\ ;\ \ \text{m} = 0,\ \ \text{n} = 3,\ \ p = -\frac{1}{3}$$

$\frac{m+1}{n} + p =$ es un entero, entonces

$$x^{-3} + 1 = z^3 \ \Rightarrow\ x^3 = \frac{1}{z^3-1} \ \Rightarrow\ z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$$

además $x = (z^3-1)^{-\frac{1}{3}} \ \Rightarrow\ dx = -z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{1+(\frac{1}{z^3}-1)}}(-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}})dz$$

$$= -\int \frac{\dfrac{z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}}{\dfrac{z}{(z^3-1)^{\frac{1}{3}}}}}{}dz = -\int z(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}(z^3-1)^{\frac{1}{3}}dz$$

$$= -\int \frac{z}{z^3-1}dz = -\int \frac{z\,dz}{(z-1)(z^2+z+1)} = -\int (\frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+z+1})dz$$

$$\frac{z}{z^3-1} = \frac{A(z^2+z+1)+B(z^2-z)+C(z-1)}{(z-1)(z^2+z+1)}$$

$$z = (A+B)z^2 + (A-B+C)z + A - C$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=0 \end{array}\right\} \text{ resolviendo se tiene: } A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{1}{3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = -\int \frac{z}{z^3+1}dz = -\int (\frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+z+1})dz = -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{3}\int \frac{z-1}{z^2+z+1}dz$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|z-1| + \frac{1}{6}\int \frac{2z+1}{z^2+z+1}dz - \frac{1}{6}\int \frac{dz}{z^2+z+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2+z+1}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|z-1| + \frac{1}{6}\ln|z^2+z+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + c \quad \text{donde} \quad z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$$

1459 $\displaystyle\int \frac{5x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$

Desarrollo

$$\int \frac{5x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^4}} = \frac{5}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{5}{2}\ln|x^2+\sqrt{1+x^4}\,|+c$$

1460 $\int \cos^4 x\,dx$

Desarrollo

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}(x+\operatorname{sen} 2x+\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx) = \frac{1}{4}(x+\operatorname{sen} 2x+\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 4x}{8})+c$$

$$= \frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sen} 4x}{32}+c$$

1461 $\int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen}^5 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{\cos x.\operatorname{sen}^5 x} = \int \sec x.\csc^5 x\,dx = \int (1+c\operatorname{tg}^2 x)^2 \sec x.\csc x\,dx$$

$$= \int (1+2c\operatorname{tg}^2 x+c\operatorname{tg}^4 x)\sec x.\csc x\,dx$$

$$= \int (\sec x.\csc x+2c\operatorname{tg}^2 x.\sec x.\csc x+c\operatorname{tg}^4 x.\sec x.\csc x)dx$$

$$= \int (\frac{\sec x}{\operatorname{sen} x}+2\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}+\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^5 x})dx$$

$$= \int (\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}+2c\operatorname{tg} x.\csc^2 x+c\operatorname{tg}^3 x.\csc^2 x)dx = \ln|\operatorname{tg} x| - c\operatorname{tg}^2 x - \frac{c\operatorname{tg}^4}{4}+c$$

1462 $\int \frac{1+\sqrt{c\operatorname{tg} x}}{\operatorname{sen}^2 x}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{1+\sqrt{c\operatorname{tg} x}}{\operatorname{sen}^2 x}dx = \int (\csc^2 x + \sqrt{c\operatorname{tg} x}\csc^2 x)dx$$

$$= -c\operatorname{tg} x - \frac{2}{3}c\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x + c = -c\operatorname{tg} x - \frac{2}{3}\sqrt{c\operatorname{tg}^3 x} + c$$

1463 $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$

Desarrollo

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} = \int \frac{\operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} = \int (\operatorname{sen} x(\cos x)^{-\frac{3}{5}} - \operatorname{sen} x.\cos^{\frac{7}{5}} x)dx$$

$$= -\frac{5}{2}\cos^{\frac{2}{5}} x + \frac{5}{12}\cos^{\frac{12}{5}} x + c = \frac{5}{12}(\cos^2 x - 6)\sqrt[5]{\cos^2 x} + c$$

1464 $\int \csc^5 5x\,dx$

Desarrollo

$$\int \csc^5 5x\,dx = \int (1+c\operatorname{tg}^2 5x)\csc^3 5x\,dx = \int \csc^3 5x\,dx + \int c\operatorname{tg}^2 5x.\cos^3 5x\,dx \quad \textbf{... (1)}$$

integrando $\int \csc^3 5x\,dx$ por partes

$$\int \csc^3 5x\,dx = \frac{1}{10}\ln|\csc 5x - c\operatorname{tg} 5x| - \frac{1}{10}c\operatorname{tg} 5x.\csc 5x$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{1}{\operatorname{sen} 5x} - \frac{\cos 5x}{\operatorname{sen} x}\right| = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{1-\cos 5x}{\operatorname{sen} 5x}\right|$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\sqrt{\frac{1-\cos 5x}{1+\cos 5x}}\right| = \frac{1}{10}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{5x}{2}\right| \quad \textbf{... (2)}$$

integrando $\int c\,tg^2 5x.\csc^3 5x\,dx$ por partes

$$\begin{cases} u = c\,tg\,5x \;\Rightarrow\; du = -5\csc^2 5x\,dx \\ dv = \csc^3 5x.c\,tg\,5x\,dx \;\Rightarrow\; v = -\dfrac{\csc^3 5x}{15} \end{cases}$$

$$\int c\,tg^2 5x.\csc^3 5x\,dx = -\frac{c\,tg\,5x.\csc^3 5x}{15} - \frac{1}{3}\int \csc^5 5x\,dx \qquad \ldots (3)$$

reemplazando (2), (3) en (1) se tiene:

$$\int \csc^5 5x\,dx = \int \csc^3 5x\,dx + \int c\,tg^2 5x.\csc^2 5x\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\ln|tg\frac{5x}{2}| - \frac{c\,tg\,5x.\csc 5x}{10} - \frac{c\,tg\,5x.\csc^3 5x}{15} - \frac{1}{3}\int \csc^5 5x\,dx$$

$$\therefore \quad \int \csc^5 5x\,dx = \frac{3}{40}\ln|tg\frac{5x}{2}| - \frac{3}{40}c\,tg\,5x.\csc 5x - \frac{1}{20}c\,tg\,5x.\csc^3 5x + c$$

$$= -\frac{\cos 5x}{20\,\text{sen}^4 5x} - \frac{3\cos 5x}{40\,\text{sen}^2 5x} + \frac{3}{40}\ln|tg\frac{5x}{2}| + c$$

1465 $\displaystyle\int \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx$

<u>Desarrollo</u>

$$\int \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx = \int tg^2 x.\sec^4 x\,dx = \int tg^2 x(1+tg^2 x)\sec^2 x\,dx$$

$$= \int tg^2 x\sec^2 x\,dx = \int tg^5 x.\sec^2 x\,dx = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + c$$

1466 $\int \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+x)dx$

Desarrollo

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\cos x-\operatorname{sen}x.\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\operatorname{sen}x)$$

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+x)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\cos x+\cos\frac{\pi}{4}.\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\operatorname{sen}x)$$

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x).\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\operatorname{sen}x)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\operatorname{sen}x)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)=\frac{\cos 2x}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x).\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+x)dx=\int\frac{\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+c$$

1467 $\int \operatorname{tg}^3(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx=\int \operatorname{tg}^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx=\int(\sec^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})-1)\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}))dx$$

$$=\int(\sec^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx-\int\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx$$

$$=\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})+2\ln|\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+c$$

1468 $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}x+3\cos x-5}$

Desarrollo

Se conoce que: $\operatorname{sen} x=\dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t \Rightarrow dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$

$$\int\frac{x}{2\operatorname{sen} x+3\cos x-5}=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}-5}=-\int\frac{dt}{4t^2-2t+1}=-\int\frac{dt}{4(t-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{4t-1}{\sqrt{3}})+c=-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}})+c$$

1469 $\displaystyle\int\frac{dx}{2+3\cos^2 x}$

Desarrollo

$2+3\cos^2 x=2\operatorname{sen}^2 x+5\cos^2 x$

$$\int\frac{dx}{2+3\cos^2 x}=\int\frac{dx}{2\operatorname{sen}^2 x+5\cos^2 x}=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{2\operatorname{tg}^2 x+5}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}\sec^2 x\,dx}{(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)^2+5}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}})+c=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}(\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{10}})+c$$

1470 $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x+2\operatorname{sen}^2 x}$

Desarrollo

Dividiendo entre $\cos^2 x$ se tiene:

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x+2\operatorname{sen}x\cos x+2\operatorname{sen}^2 x}=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{2\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2 x\,dx}{(\operatorname{tg}x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}})+c=\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x+1)+c$$

1471 $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x}$

Desarrollo

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos x}=\int\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^2 x\cos x}dx=\int(\frac{1}{2\cos x}+\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(\sec x+c\operatorname{tg}x.\csc x)dx=\frac{1}{2}\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2}\csc x+c$$

1472 $\int\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

Desarrollo

Sea $z=\cos x$; entonces $\frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)}=\frac{1}{(2+z)(3+z)}=\frac{A}{2+z}+\frac{B}{3+z}$

$1=(A+B)z+3A+2B$ de donde se tiene: $\left.\begin{matrix}A+B=0\\3A+2B=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ A = 1, B = -1

$$\frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)}=\frac{1}{2+\cos x}-\frac{1}{3-\cos x}$$

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}=\int\frac{dx}{2+\cos x}-\int\frac{dx}{3+\cos x}\quad\textbf{... (1)}$$

integrando: $\int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$ ... **(2)**

integrando: $\int \frac{dx}{3+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$ ... **(3)**

reemplazando (3), (2) en (1)

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right) + c$$

1473 $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 1}}$

Desarrollo

$$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4 + \operatorname{tg} x + 1}} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{(\operatorname{tg} x + 2)^2 - 3}}$$

Sea $u = \operatorname{tg} x + 2 \Rightarrow du = \sec^2 x\, dx$

$$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 1}} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{(\operatorname{tg} x + 2)^2 - 3}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 3}}$$

$$= \ln|u + \sqrt{u^2 - 3}| + c = \ln|\operatorname{tg} x + 2 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 1}| + c$$

1474 $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2 + \operatorname{sen}^2 ax}}\, dx$

Desarrollo

$$\int \frac{\cos ax\, dx}{\sqrt{a^2 + \operatorname{sen}^2 ax}} = \int \frac{\cos ax\, dx}{\sqrt{a^2 + (\operatorname{sen} ax)^2}}$$

Sea u = sen ax $\Rightarrow$ du = a cos ax dx

$$\int \frac{\cos ax\,dx}{\sqrt{a^2+\operatorname{sen}^2 ax}} = \frac{1}{a}\int \frac{a\cos ax\,dx}{\sqrt{a^2+(\operatorname{sen} ax)^2}} = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sen} ax+\sqrt{a^2+\operatorname{sen}^2 ax}|+c$$

1475 $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$

Desarrollo

$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 3x} = \int x\sec^2 3x\,dx$, integrando por partes y haciendo:

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sec^2 3x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 3x} = \int x\sec^2 3x\,dx = \frac{x}{3}\operatorname{tg} 3x - \int \frac{\operatorname{tg} 3x}{3}dx + c = \frac{x}{3}\operatorname{tg} 3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x|+c$$

1476 $\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx$

Desarrollo

$$\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx = \int x.\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (x - x\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}[\int x\,dx - \int x\cos 2x\,dx] = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx \qquad \textbf{... (1)}$$

integrando $\int x\cos 2x\,dx$ por partes

haciendo: $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos 2x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} \end{cases}$

$$\int x\cos 2x\,dx = \frac{x}{2}\operatorname{sen}2x + \frac{\cos 2x}{4} \qquad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1)

$$\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\operatorname{sen}2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c$$

1477 $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

Desarrollo

Sea $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}$

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{e^u}{3} + c = \frac{e^{x^3}}{3} + c$$

1478 $\int xe^{2x}dx$

Desarrollo

Sea $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$$\int xe^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + c$$

1479 $\int x^2 \ln\sqrt{1-x}\,dx$

Desarrollo

$$\int x^2 \ln\sqrt{1-x}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2 \ln(1-x)dx$$

Sea $\begin{cases} u = \ln(1-x) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x-1} \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\int x^2 \ln\sqrt{1-x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\ln(1-x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x-1}dx\right)$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x} - \frac{1}{6}\int \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x} - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6} - \frac{1}{6}\ln|x-1| + c$$

1480 $\displaystyle\int \frac{x\,\text{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Desarrollo

$u = \text{arctg}\,x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow v = \sqrt{1+x^2}$

$$\int \frac{x\,\text{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\,\text{arctg}\,x - \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx = \sqrt{1+x^2}\,\text{arctg}\,x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\,\text{arctg}\,x - \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c$$

1481 $\displaystyle\int \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{3x}{2}\right)dx$

Desarrollo

$$\int \operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})\cos(\frac{3x}{2})dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\cos(\frac{3x}{2})dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos(\frac{3x}{2}) - \cos x.\cos(\frac{3x}{2}))dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\int (\cos(\frac{5x}{4}) + \cos(\frac{x}{2}))dx$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(\frac{3x}{2}) - \frac{1}{10}\operatorname{sen}(\frac{5x}{2}) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\frac{x}{2}) + c$$

1482 $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} = \frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + c$$

1483 $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1)\operatorname{sen}^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1)\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{\csc^2 x\,dx}{1 + \operatorname{tg} x} = \int \frac{\csc^2 x.c\operatorname{tg} x}{1 + c\operatorname{tg} x}dx$$

$$= \int \frac{-\csc^2 x + \csc^2 x + \csc^2 x.c\operatorname{tg} x}{1 + c\operatorname{tg} x}dx$$

$$= \int -\frac{\csc^2 x\,dx}{1 + c\operatorname{tg} x} + \int \frac{(1 + c\operatorname{tg} x)\csc^2 x}{1 + c\operatorname{tg} x}dx = \int \frac{-\csc^2 x\,dx}{1 + c\operatorname{tg} x} + \int \csc^2 x\,dx$$

$= \ln|1 + \operatorname{ctg} x| - \operatorname{ctg} x + c$

1484 $\int \operatorname{senh} x.\cosh x\,dx$

Desarrollo

Sea u = senh x $\Rightarrow$ du = cosh x dx

$$\int \operatorname{senh} x.\cosh x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\operatorname{senh} x)^2}{2} + c$$

1485 $\int \frac{\operatorname{senh}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

Desarrollo

Sea $u = \sqrt{1-x} \Rightarrow du = \frac{-dx}{2\sqrt{1-x}} \Rightarrow -2du = \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$$\int \frac{\operatorname{senh}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \operatorname{senh} u.(-2\,du) = -2\int \operatorname{senh} u\,du$$

$$= -2\cosh u + c = -2\cosh\sqrt{1-x} + c$$

1486 $\int \frac{\operatorname{senh} x.\cosh x}{\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x}\,dx$

Desarrollo

Sea $u = \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$, derivando se tiene:

du = (2 senh x cosh x + 2 cosh x senh x)dx $\Rightarrow$ du = 4 senh x cosh x dx

$$\int \frac{\operatorname{senh} x.\cosh x\,dx}{\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln|\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x| + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln|\cosh 2x| + c$$

1487 $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{senh}^2 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{senh}^2 x} = \int x \csc h^2 x\,dx$$

$$\text{sea } \begin{cases} u = x \\ dv = \csc h^2 x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\operatorname{ctgh} x \end{cases}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{senh}^2 x} = \int x \csc h^2 x\,dx = -xc\operatorname{tgh} x + \int c\operatorname{tgh} x\,dx = \text{-x ctgh x + ln |senh x| + c}$$

1488 $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}$

Desarrollo

$$\text{Sea } \begin{cases} e^x - 1 = z \Rightarrow e^x = z + 1 \\ dz = e^x dx \Rightarrow \dfrac{dz}{z+1} = dx \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} = \int \frac{dx}{(e^x - 1)^2 - 1}$$

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} = \int \frac{dx}{(z^2 - 1)(z+1)} = \int \frac{dz}{(z+1)^2 (z-1)}$$

$$= \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{z+1} - \frac{\frac{1}{2}}{(z+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{z-1} \right) dz = -\frac{1}{4} \ln |z+1| + \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{4} \ln |z-1|$$

$$= -\frac{1}{4} \ln |e^x - 1 + 1| + \frac{1}{2e^x} + \frac{1}{4} \ln |e^x - 1| + c = -\frac{x}{4} + \frac{1}{2e^x} + \frac{1}{4} \ln |e^x - 2| + c$$

1489 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 6e^x + 13}$

Desarrollo

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 6e^x + 13} = \int \frac{e^x dx}{(e^x - 3)^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2} + c$$

1490 $\int \frac{e^{2x} dx}{(e^x + 1)^{\frac{1}{4}}}$

Desarrollo

Sea $\begin{cases} e^x + 1 = z^4 \\ e^x dx = 4z^3 dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x = z^4 - 1 \\ e^{2x} dx = (z^4 - 1)4z^3 dz \end{cases}$

$$\int \frac{e^{2x} dx}{(e^x + 1)^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{(z^4 - 1)4z^3}{z} dz = 4\int (z^6 - z^2) dz$$

$$= \frac{4}{7} z^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3} z^{\frac{3}{4}} + c = \frac{4}{7} \sqrt[4]{(e^x + 1)^7} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{(e^x + 1)^3} + c$$

1491 $\int \frac{2^x dx}{1 - 4^x}$

Desarrollo

$$\int \frac{2^x dx}{1 - 4^x} = \int \frac{2^x dx}{1 - (2^x)^2}; \text{ sea } \quad u = 2^x \Rightarrow du = 2^x \ln 2\, dx$$

$$\int \frac{2^x dx}{1 - 4^x} = \int \frac{2^x dx}{1 - (2^x)^2} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2\ln 2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + c = \frac{1}{2\ln 2} \ln \left| \frac{1+2^x}{1-2^x} \right| + c$$

1492 $\int (x^2 - 1).10^{-2x} dx$

Desarrollo

Sea $\begin{cases} u = x^2 - 1 & \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \\ dv = 10^{-2x}dx & \Rightarrow \quad v = -\dfrac{10^{-2x}}{2\ln 10} \end{cases}$

$$\int (x^2-1).10^{-2x}dx = -\frac{x^2-1}{2\ln 10}10^{-2x} + \frac{1}{\ln 10}\int x.10^{-2x}dx \qquad \text{... (1)}$$

$\begin{cases} u = x & \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = 10^{-2x}dx & \Rightarrow \quad v = \dfrac{10^{-2x}}{2\ln 10} \end{cases}$

$$\int x.10^{-2x}dx = \frac{x}{2\ln 10}10^{-2x} + \frac{10^{-2x}}{2^2\ln^2 10} \qquad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1), se tiene:

$$\int (x^2-1)10^{-2x}dx = \left(-\frac{x^2-1}{2\ln 10} + \frac{x}{2\ln^2 10} + \frac{1}{2^2\ln^3 10}\right)10^{-2x} + c$$

$$= -\frac{10^{-2x}}{2\ln 10}\left(x^2 - 1 - \frac{x}{\ln 10} - \frac{1}{2\ln^2 10}\right) + c$$

1493 $\displaystyle\int \sqrt{e^x+1}\,dx$

Desarrollo

Sea $\begin{cases} z^2 = e^x + 1 \\ e^x dx = 2z\,dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 - 1 = e^x \\ dx = \dfrac{2z\,dz}{z^2-1} \end{cases}$

$$\int \sqrt{e^x+1}\,dx = \int \frac{2z^2}{z^2-1}dz = 2\int \left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right)dz$$

$$= 2\left(z + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right) + c = 2\sqrt{e^x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + c$$

1494 $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$

Desarrollo

Sea $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}) dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln x - \ln \sqrt{1+x^2} + c$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln |\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}| + c$$

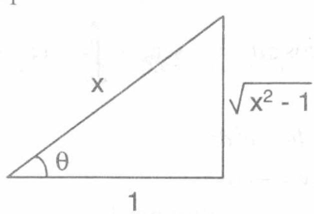
1495 $\int x^3 \operatorname{arcsen}(\frac{1}{x}) dx$

Desarrollo

Sea $\begin{cases} u = \operatorname{arcsen}(\dfrac{1}{x}) \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\int x^3 \operatorname{arcsen}(\frac{1}{x}) dx = \frac{x^4}{4} \operatorname{arcsen}(\frac{1}{x}) + \frac{1}{4} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{... (1)}$$

integrando $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} dx$ por sustitución



$\sec\theta = x \Rightarrow dx = \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec^3\theta.\sec\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}} = \int \frac{\sec^4\theta.\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta} d\theta = \int \sec^4\theta\, d\theta$$

$$= \int (1+tg^2\theta)\sec^2\theta\, d\theta = \int (\sec^2\theta + \operatorname{tg}^2\theta\sec^2\theta) d\theta = \operatorname{tg}\theta + \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{3}$$

$$= \sqrt{x^2-1} + \frac{x^2-1}{3}\sqrt{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{3}(x^2+2) \qquad \textbf{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1)

$$\int x^3 \operatorname{arcsen}(\frac{1}{x})dx = \frac{x^4}{4}\operatorname{arcsen}(\frac{1}{x}) + \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{x^2-1}}{3}(x^2+2) + c$$

$$= \frac{1}{4}(x^4 \operatorname{arcsen}\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{3}(x^2+2)) + c$$

1496 $\int \cos(\ln x)dx$

Desarrollo

Sea $z = \ln x \Rightarrow x = e^z \Rightarrow dx = e^z dz$

$$\int \cos(\ln x)dx = \int e^z \cos z\, dz$$

$$\begin{cases} u = e^z \\ dv = \cos z\, dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^z dz \\ v = \operatorname{sen} z \end{cases}$$

$$\int \cos(\ln x)dx = \int e^z \cos z\, dz = e^z \operatorname{sen} z - \int e^z \operatorname{sen} z\, dz$$

$$\begin{cases} u = e^z \\ dv = \operatorname{sen} z\, dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^z dz \\ v = -\cos z \end{cases}$$

$$\int \cos(\ln x)dx = \int e^z \cos z\,dz = e^z \operatorname{sen} z + e^z \cos z - \int e^z \cos z\,dz$$

$$= \int e^z \cos z\,dz = \frac{e^z}{2}(\operatorname{sen} z + \cos z) + c = \frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)) + c$$

1497 $\int (x^2 - 3x)\operatorname{sen} 5x\,dx$

Desarrollo

$$\begin{cases} u = x^2 - 3x \\ dv = \operatorname{sen} 5x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x-3)dx \\ v = -\dfrac{\cos 5x}{5} \end{cases}$$

$$\int (x^2 - 3x)\operatorname{sen} 5x\,dx = -\frac{x^2 - 3x}{5}\cos 5x + \int \frac{2x-3}{5}\cos 5x\,dx$$

$$= -\frac{x^2 - 3x}{5}\cos 5x + \frac{1}{5}\int (2x-3)\cos 5x\,dx$$

$$\begin{cases} u = 2x - 3 \\ dv = \cos 5x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\,dx \\ v = \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5} \end{cases}$$

$$\int (x^2 - 3x)\operatorname{sen} 5x\,dx = -\frac{x^2 - 3x}{5}\cos 5x + \frac{2x-3}{25}\operatorname{sen} 5x - \frac{2}{25}\int \operatorname{sen} 5x\,dx$$

$$= -\frac{x^2 - 3x}{5}\cos 5x + \frac{2x-3}{25}\operatorname{sen} 5x + \frac{2}{125}\cos 5x + c$$

$$= \frac{1}{5}(-x^2 \cos 5x + \frac{2}{5}\operatorname{sen} 5x + 3x\cos 5x + \frac{2}{25}\cos 5x - \frac{3}{5}\operatorname{sen} 5x) + c$$

1498 $\int x \operatorname{arctg}(2x+3)dx$

Desarrollo

$$\begin{cases} u = \operatorname{arctg}(2x+3) \\ dv = x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{2x^2+6x+5} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int x \operatorname{arctg}(2x+3)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(2x+3) - \int \frac{x^2 dx}{4x^2+12x+10}$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(2x+3) - \frac{1}{4}\left(\int dx + \int \frac{3x+\frac{5}{2}}{4x^2+12x+10}dx\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(2x+3) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\int \frac{6x+5}{4x^2+12x+10}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(2x+3) - \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\int \frac{6x\,dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}} + \frac{5}{8}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(2x+3) - \frac{x}{4} + \frac{4}{8}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+\frac{5}{2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(2x+3) - \frac{x}{4} + \frac{3}{8}\ln|x^2+3x+\frac{5}{2}| - \operatorname{arctg}(2x+3)$$

$$= \frac{1}{2}[(x^2-2)\operatorname{arctg}(2x+3) + \frac{3}{4}\ln|2x^2+6x+5| - \frac{x}{2}] + c$$

1499 $\int \operatorname{arcsen}\sqrt{x}\,dx$

Desarrollo

Sea $x = z^2 \Rightarrow dx = 2z\,dz$

$$\int \operatorname{arcsen}\sqrt{x}\,dx = 2\int z \operatorname{arcsen} z\,dz$$

Sea $\begin{cases} u = \text{arcsen}\, z \\ dv = z\, dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \\ v = \dfrac{z^2}{2} \end{cases}$

$$\int \text{arcsen}\sqrt{x}\, dx = 2\left(\frac{z^2}{2}\text{arcsen}\, z - \frac{1}{2}\int \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\, dz\right)$$

$z = \text{sen}\,\theta \;\Rightarrow\; dz = \cos\theta\, d\theta$

$$\int \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = \int \frac{\text{sen}^2\theta.\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}} = \int \text{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta) = \frac{1}{2}(\text{arcsen}\, z - z\sqrt{1-z^2}) + c$$

Luego:

$$\int \text{arcsen}\sqrt{x}\, dx = 2\left(\frac{z^2}{2}\text{arcsen}\, z - \frac{1}{4}(\text{arcsen}\, z - z\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$= z^2\,\text{arcsen}\, z - \frac{1}{2}\text{arcsen}\, z - \frac{z}{2}\sqrt{1-z^2} = \text{arcsen}(z^2 - \frac{1}{2}) - \frac{z}{2}\sqrt{1-z^2} + c$$

$$= \text{arcsen}\sqrt{x}(x - \frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{x}}{2}(\sqrt{1-x}) + c$$

1500 $\displaystyle\int |x|\, dx$

Desarrollo

$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$; $\displaystyle\int |x|\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x \ge 0 \\ -\dfrac{x^2}{2}, & x < 0 \end{cases}$

$= \dfrac{x|x|}{2}$; Luego: $\displaystyle\int |x|\, dx = \frac{x|x|}{2} + c$

CAPÍTULO V

5. LA INTEGRAL DEFINIDA

5.1. LA INTEGRAL DEFINIDA COMO LÍMITE DE UNA SUMA

DEFINICIÓN.- Si f es una función definida en el intervalo cerrado [a,b]. Entonces la integral definida de f de a a b, denotada por:

$\int_a^b f(x)dx$, está dada por: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n=i} f(\xi i)\Delta x_i$, si $\exists$ el límite

donde $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, i = 0,1,..., n – 1

Calcular las integrales siguientes, considerándolos como límites de las correspondientes suma integrales:

1501 $\int_a^b dx$

Desarrollo

f(x) = 1, $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, ξ_i tomamos de las siguiente manera: $\xi_i = a + \frac{b-a}{n} i$;

$\xi_i = a + i\Delta x_i$, como f(x) = 1 $\Rightarrow$ $f(\xi_i) = 1$

$$\int_a^b dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n=1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n=1} \frac{b-a}{n} = \lim_{\Delta x_i \to 0} n\frac{b-a}{n} = b-a$$

1502 $\int_0^T (V_0 + gt)dt$, donde V_0 y g son constantes

Desarrollo

Sean $f(t) = V_0 + gt$, $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{T}{n}$

$\xi_i = 1 + i$, $\Delta x_i = \dfrac{T}{n} i$; $f(t) = f(\xi_i) = V_0 + \dfrac{gT}{n} i$

$$\int_0^T (V_0 + gt)dt = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (V_o + g\frac{T}{n} i)\frac{T}{n}$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{V_0 T}{n} + \frac{gT^2}{n^2} i) = \lim_{n \to \infty} (V_0 T + \frac{gT^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i)$$

$$= V_0 T + \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{gT^2}{n^2} \frac{(n-1)(n)}{2} = V_0 T + g\frac{T^2}{2}$$

1503 $\int_{-2}^{1} x^2 dx$

Desarrollo

Sean $f(x) = x^2$, $\Delta x_i = \dfrac{1-(-2)}{n} = \dfrac{3}{n}$, $\xi_i = -2 + \dfrac{3i}{n} = a + i\Delta x_i$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f(\xi_i) = (-2 + \dfrac{3i}{n})^2$ $f(\xi_i) = 4 - \dfrac{12}{n} i + \dfrac{9i^2}{n^2}$

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (4 - \frac{12i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}).\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(12 - \frac{36}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} + \frac{27}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}) = 12 - 18 + 9 = -6 + 9 = 3$$

1504 $\int_0^{10} 2^x\,dx$

Desarrollo

Sea $f(x) = 2^x$ y $\Delta x_i = \frac{10}{n}$; $\xi_i = \frac{10i}{n}$

Como $f(x) = 2^x \Rightarrow f(\xi_i) = 2^{\frac{10}{n}i}$

$$\int_0^{10} 2^x\,dx = \lim_{\Delta x_i\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{10}{n}}i\frac{10}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}(1 + 2^{\frac{10}{n}} + 2^{\frac{2.10}{n}} + 2^{\frac{3.10}{n}} + \ldots + 2^{(n-1).\frac{10}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}(\frac{1-(2^{\frac{10}{n}})^n}{1-2^{\frac{10}{n}}}) \quad \text{donde} \quad r = 2^{\frac{10}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1-2^{10})\frac{\frac{10}{n}}{1-2^{\frac{10}{n}}} = (1-2^{10})\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{n}}{1-2^{\frac{10}{n}}}$$

$$\text{por L'HOSPITAL} = (1-2^{10})\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{10}{n^2}}{2^{\frac{10}{n}}.\frac{10}{n^2}\ln 2} = \frac{2^{10}-1}{\ln 2}$$

1505 $\int_{1}^{5} x^3 dx$

Desarrollo

Sea $f(x)=x^3$, $\Delta x_i = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$, $\xi_i = a + i.\Delta x_i = 1+\frac{4i}{n}$

Como $f(x)=x^3 \Rightarrow f(\xi_i)=(1+\frac{4i}{n})^3$

$$\int_{1}^{5} x^3 dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (1+\frac{12i}{n}+\frac{48i^2}{n^2}+\frac{64i^3}{n^3})\frac{4}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (4+\frac{48(n-1)n}{n^2.2}+\frac{192}{n^3}.\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{256}{n^4}-\frac{n^2(n-1)^2}{2})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (4+24\frac{n-1}{n}+32.\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}+\frac{62(n-1)^2}{n^2}) = 4+24+64+64 = 156$$

1506 Hallar el área del trapecio mixtilíneo, limitada por la hipérbola $y=\frac{1}{x}$, el eje X, y las dos ordenadas x = a, x = b, (0 < a < b)

Desarrollo

$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$; $\xi_i = a - i\frac{b-a}{n}$

como $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(\xi_i)=\frac{1}{a+i(\frac{b-a}{n})}$

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$A=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a+i\frac{b-a}{n}}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$A=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{an+i(b-a)}$$,en forma análoga el ejercicio 1505; se tiene: $A=\ln\frac{b}{a}$

1507 $f(x)=\int_0^x sent\, dt$

<u>**Desarrollo**</u>

$f(x)=\int_0^x sent\, dt$, donde f(t) = sen t

$\Delta t_i=\frac{x}{n}$, $\xi_i=\frac{x_i}{n}$ como f(t) = sen t $\Rightarrow$ $f(\xi_i)=\text{sen}\,\frac{x_i}{n}$

$$f(x)=\int_0^x sent\, dt=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta t_i=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\text{sen}\left(\frac{x_i}{n}\right).\frac{x}{n}$$

$$=\lim_{\Delta t_i\to 0}\frac{x}{n}\left(\text{sen}\left(0.\frac{x}{n}\right)+\text{sen}\,1.\frac{x}{n}+\text{sen}\,2.\frac{x}{n}+...+\text{sen}\,\frac{n-1}{n}x\right)$$

$$=\lim_{\Delta t_i\to 0}\frac{x}{n}\left(\frac{1}{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2n}}\left(\cos\frac{x}{2n}-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{n}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{n}}{2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2n}\right)}.\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2n}-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{n}\right)$$

= 1 – cos x, aplicando L'HOSPITAL

NOTA.- $\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,2\alpha+...+\text{sen}\,n\alpha=\frac{1}{2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)$

5.2. CÁLCULO DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS POR MEDIO DE INDEFINIDAS.-

1° INTEGRAL DEFINIDA CON EL LÍMITE SUPERIOR VARIABLE.-

Consideremos la función f(t) continua en el segmento [a,b], la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es una función primitiva de f(x), es decir: $F'(x)=f(x)$ para a < x < b

2° FÓRMULA DE NEWTON – LEIBNIZ.-

Si $F'(x)=f(x)$ se tiene $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

1508 Sea $I=\int_a^b \frac{dx}{\ln x}$, (b > a > 1). Hallar: **a)** $\frac{dI}{da}$ **b)** $\frac{dI}{db}$

Desarrollo

a) $I=\int_a^b \frac{dx}{\ln x} = -\int_b^a \frac{dx}{\ln x} \Rightarrow \frac{dI}{da} = -\frac{1}{\ln a}$

b) $I=\int_a^b \frac{dx}{\ln x} \Rightarrow \frac{dI}{db} = \frac{1}{\ln b}$

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1509 $F(x)=\int_1^x \ln t\,dt$, x > 0

Desarrollo

$$F(x)=\int_1^x \ln t\,dt \Rightarrow F'(x)=\ln x$$

1510 $F(x)=\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt$

Desarrollo

$$F(x)=\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt=-\int_0^x \sqrt{1-t^4}\,dt \;\Rightarrow\; F'(x)=-\sqrt{1+x^4}$$

1511 $F(x)=\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$

Desarrollo

$$F(x)=\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt=\int_x^0 e^{-t^2}\,dt+\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$$

$$F(x)=-\int_0^x e^{-t^2}\,dt+\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt \quad \text{entonces:} \quad F'(x)=-e^{-x^2}+2xe^{-x^4}$$

1512 $I=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)dt$

Desarrollo

$$I=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)dt=\int_{\frac{1}{x}}^{a} \cos t^2 dt+\int_a^{\sqrt{x}} \cos(t^2)dt$$

$$I=-\int_a^{\frac{1}{x}} \cos t^2 dt+\int_a^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt \quad \text{entonces:}$$

$$\frac{dI}{dx}=-\cos(\frac{1}{x^2}).(-\frac{1}{x^2})+\cos x(\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$\frac{dI}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x^2})$$

1513 Hallar los puntos extremos de la función: $y=\int_0^x \frac{sent}{t}dt$ en el campo x > 0.

Desarrollo

$$y=\int_0^x \frac{sent}{t}dt \Rightarrow y'=\frac{\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow y'=0$$

para los puntos críticos ⇒ sen x = 0 ⇒ x = nπ donde n = 1,2,3... π los puntos extremos de la función es x = nπ, n = 1,2,3...

Utilizando la fórmula de Newton – Leibniz.-

Hallar las siguientes integrales:

1514 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

Desarrollo

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

1515 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$

Desarrollo

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Big|_{-2}^{-1}=-(\frac{1}{8}-\frac{1}{2})=\frac{3}{8}$$

1516 $\int_{-x}^{x} e^t\,dt$

Desarrollo

$$\int_{-x}^{x} e^t\,dt=e^t\Big|_{-x}^{x}=e^x-e^{-x}=2senhx$$

1517 $\int_0^x \cos t\, dt$

Desarrollo

$$\int_0^x \cos t\, dt = sent\Big|_0^x = senx \Rightarrow \int_0^x \cos t\, dt = senx$$

Valiéndose de las integrales definidas, hallar los límites de las sumas.

1518 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2})$

Desarrollo

Sea $S_n = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n}(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n-1}{n})$

Consideremos: $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ y f(x) = x

Luego el límite es igual a la integral $\int_0^1 f(x)dx$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{donde} \quad \xi_i = \frac{i}{n} \quad \text{como f(x) = x} \Rightarrow f(\xi_i) = \frac{i}{n}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

1519 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{n+n})$

Desarrollo

Sea $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \Rightarrow S_n = \frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{n}{n}})$

Luego $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ es la "n" participación en $[0,1]$ y $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $\xi_i = \frac{i}{n}$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}(-\frac{1}{1+\frac{i}{n}})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$$

1520 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}}$

Desarrollo

Sea $S_n = \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}(\frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^p})$

$S_n = \frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + ... + (\frac{n}{n})^p]$

Luego: $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, que es las "n" particiones en $[0,1]$ y $f(x) = x^p$

Luego: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1^{p+1}}{p+1} - 0 = \frac{1}{p+1}$

Calcular las integrales:

1521 $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$

Desarrollo

$$\int_1^2 (x^2-2x+3)dx = (\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\Big|_1^2 = (\frac{8}{3}-4+6)-(\frac{1}{2}-1+3) = \frac{14}{3}-\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$$

1522 $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$

Desarrollo

$$\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx = (\frac{2x}{3}\sqrt{2x}+\frac{3x}{4}\sqrt[3]{x})\Big|_0^8 = (\frac{64}{3}+\frac{48}{4})-0=\frac{100}{3}$$

1523 $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$

Desarrollo

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy = \int_1^4 (\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}})dy = (-\frac{1}{y}-\frac{2}{\sqrt{y}})\Big|_1^4 = -(\frac{1}{4}+1)+(1+2)=\frac{-5}{4}+3=\frac{7}{4}$$

1524 $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$

Desarrollo

$$\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6 = \frac{2}{3}(6-2)^{\frac{3}{2}}-0=\frac{16}{3}$$

1525 $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$

Desarrollo

$$\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = \frac{2}{3}\sqrt{25+3x}\Big|_0^{-3} = \frac{8}{3}-\frac{10}{3}=-\frac{2}{3}$$

1526 $\int_{-2}^{-3}\frac{dx}{x^2-1}$

Desarrollo

$$\int_{-2}^{-3}\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{-2}^{-3}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-3-1}{-3+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-2-1}{-2+1}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$$

1527 $\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$

Desarrollo

$$\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{x^2+3x+2}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx-\frac{3}{2}\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+3x+2}$$

$$=[\frac{1}{2}\ln(x^2+3x+2)-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right|]\Bigg|_{0}^{1}$$

$$=[\frac{1}{2}\ln(x^2+3x+2)-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|]\Bigg|_{0}^{1}$$

$$=(\frac{1}{2}\ln 6-\frac{3}{2}\ln\frac{2}{3})-(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln\frac{1}{2})=2\ln 3-2\ln 2=2\ln\frac{3}{2}=\ln(\frac{9}{4})$$

1528 $\int_{-1}^{1}\frac{y^2dy}{y+2}$

Desarrollo

$$\int_{-1}^{1}\frac{y^2}{y+2}dy=\int_{-1}^{1}(y-2+\frac{4}{y+2})dy=[(\frac{y^2}{2}-2y+4\ln(y+2)]\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= (\frac{1}{2} - 2 + 4\ln 3) - (\frac{1}{2} + 2 + 4\ln 1) = 4\ln 3 - 4$$

1529 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

Desarrollo

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1} = arctg(x+2)\Big|_0^1 = \text{arctg } 3 - \text{arctg } 2 = \text{arctg}\frac{1}{7}$$

NOTA: Sea $z = \text{arctg } 3 \Rightarrow \text{tg } z = 3$

$y = \text{arctg } 2 \Rightarrow \text{tg } y = 2$

$$\text{tg}(z-y) = \frac{\text{tg } z - \text{tg } y}{1 + \text{tg } z.\text{tg } y} = \frac{3-2}{1+6} = \frac{1}{7}$$

$$\text{tg}(z-y) = \frac{1}{7} \Rightarrow z - y = \text{arctg}(\frac{1}{7})$$

$$\text{arctg } 3 - \text{arctg } 2 = \text{arctg}\frac{1}{7}$$

1530 $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

Desarrollo

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int_3^4 \frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_3^4$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_3^4 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

1531 $\int_0^1 \frac{z^3 dz}{z^8+1}$

Desarrollo

$$\int_0^1 \frac{z^3 dz}{z^8+1} = \int_0^1 \frac{z^3 dz}{(z^4)^2+1} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4z^3 dz}{(z^4)^2+1} = \frac{1}{4} arctg(z^4)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{16}$$

1532 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 \alpha \, d\alpha$

Desarrollo

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 \alpha \, d\alpha = tg\alpha\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1533 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Desarrollo

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsenx\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = arcsen\frac{\sqrt{2}}{2} - arcsen0 = \frac{\pi}{4}$$

1534 $\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

Desarrollo

$$\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = arcsen(\frac{x-2}{3})\Big|_2^{3.5} = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arcsen} 0 = \frac{\pi}{6}$$

1535 $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$

Desarrollo

$$\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3y^2 dy}{\sqrt{(y^3)^2+4}} = \frac{1}{3}\ln|y^3+\sqrt{y^6+4}|\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+\sqrt{5}| - \frac{1}{3}\ln 2 = \frac{1}{3}\ln|\frac{1+\sqrt{5}}{2}|$$

1536 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\alpha\, d\alpha$

Desarrollo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\alpha\, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\, d\alpha = (\frac{\alpha}{2} + \frac{sen 2\alpha}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

1537 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3\psi\, d\psi$

Desarrollo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3\psi\, d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\psi) sen\psi\, d\psi = (-\cos\psi + \frac{\cos^3\psi}{3})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (0-0) - (-1+\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

1538 $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

Desarrollo

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln 3) = \ln(\frac{2}{\ln 3})$$

1539 $\int_1^e \frac{sen(\ln x)}{x} dx$

Desarrollo

$$\int_1^e \frac{sen(\ln x)}{x} dx = -\cos(\ln x)\Big|_1^e = -(\cos(\ln e) - \cos(\ln 1)) = -(\cos 1 - \cos 0) = 1 - \cos 1$$

1540 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\, dx$

Desarrollo

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\, dx = -\ln(\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -(\ln(\cos\frac{\pi}{4}) - \ln(\cos(-\frac{\pi}{4})))$$

$$= -\ln(\cos\frac{\pi}{4}) - \ln(\cos\frac{\pi}{4})) = 0$$

1541 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} ctg^4\psi\, d\psi$

Desarrollo

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} ctg^4\psi\, d\psi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\psi - 1)ctg^2\psi\, d\psi = -\frac{ctg^3\psi}{3}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + (ctg\psi + \psi)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{8}{9\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}$$

1542 $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

Desarrollo

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = arctge^x\Big|_0^1 = arctge - \frac{\pi}{4}$$

1543 $\int_0^1 \cosh x\,dx$

Desarrollo

$$\int_0^1 \cosh dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$$

1544 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\cosh^2 x}$

Desarrollo

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \sec hx\,dx = tghx\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \text{tgh}(\ln 3) - \text{tgh}(\ln 2) = \frac{1}{5}$$

1545 $\int_0^{\pi} senh^2 x\,dx$

Desarrollo

$$\int_0^{\pi} senh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (e^{2x} - 2 + e^{-2x})dx = \frac{1}{4}(-2x + \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2})\Big|_0^{\pi}$$

$$= (-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} senh2x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4}\cosh 2\pi - \frac{\pi}{2}$$

5.3. INTEGRALES IMPROPIAS.-

① **DEFINICIÓN.-** Sea "f" es continua en [a,+∞>, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, existe, entonces definimos:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx}$$

(2) **DEFINICIÓN.-** Si "f" es continua en $<-\infty,b]$ y si $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$ existe, entonces definimos:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx}$$

(3) **DEFINICIÓN.-** Si "f" es continua en $<-\infty,+\infty>$ entonces:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)dx}$$

NOTA.- Estas integrales son convergentes. Cuando existen estos límites en caso contrario se dice que es divergente.

(4) **DEFINICIÓN.-** Si "f" es continua en $[a,b>$ definimos $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ siempre que este límite exista.

(5) **DEFINICIÓN.-** Si "f" es continua en $<a,b]$ definimos $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, siempre que este límite exista.

(6) **DEFINICIÓN.-** Si "f" es una función en $[a,b]$ excepto en $x = c$ donde $a < c < b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$ siempre que existan estos límites.

Calcular las siguientes integrales impropias (o determinar su convergencia).

1546 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Desarrollo

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

1547 $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$

Desarrollo

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x\Big|_\varepsilon^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}[\ln(-\varepsilon)-\ln(-1)] + \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 2 - \ln\varepsilon) \Rightarrow \nexists$$

por tanto la integral es divergente.

1548 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$

Desarrollo

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right) = \frac{1}{1-p}$$

si $p < 1$ es divergente, y si $p \geq 1$ es convergente.

1549 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Desarrollo

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{3} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-\varepsilon-1}-\frac{1}{0-1}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+\varepsilon-1}\right)$$

$$= -(-\infty)-1-\frac{1}{2}++\infty = \infty .$$ Luego: $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$, es divergente

1550 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Desarrollo

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{arcsen} x\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\operatorname{arcsen}(1-\varepsilon) - \operatorname{arcsen}(0)) = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$$

1551 $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$

Desarrollo

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to\infty}\ln b = \ln(\infty) = \infty$$

Luego la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ es divergente.

1552 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

Desarrollo

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right) = 1$$

1553 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

Desarrollo

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1} \text{ si } p>1$$

Luego: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ es convergente si $p > 1$ divergente si $p \le 1$

1554 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Desarrollo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0)$$

$$= \operatorname{arctg}(\infty) + \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$. Luego la integral es convergente.

1555 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

Desarrollo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+5} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+2)^2+5} + \int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+5}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-2} \frac{dx}{(x+2)^2+5} + \lim_{b\to\infty} \int_{-2}^{b} \frac{dx}{(x+2)^2+5}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\frac{x+2}{\sqrt{5}}) \Big|_a^{-2} + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\frac{x+2}{\sqrt{5}}) \Big|_{-2}^{b}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(0) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\frac{a+2}{\sqrt{5}})) + \lim_{b\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\frac{b+2}{\sqrt{5}}) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(0))$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(-\infty) + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\infty)$$

$= \dfrac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\infty) = \dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$. Luego la integral es convergente.

1556 $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx$

Desarrollo

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{b\to\infty} -\cos x \Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} (\cos b - \cos 0)\,.\ \nexists$$

por lo tanto la integral es divergente

1557 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$

Desarrollo

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(\ln x) \Big|_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} [\ln(\ln \frac{1}{2}) - \ln(\ln \varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(\frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \varepsilon}) = +\infty$$

Luego la integral es divergente.

1558 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Desarrollo

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\ln x}\Big|_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} - \frac{1}{\ln\varepsilon}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon - \ln\frac{1}{2}}{\ln\varepsilon.\ln\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon + \ln 2}{\ln\varepsilon.\ln\frac{1}{2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{2}.\frac{1}{\varepsilon}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\ln 1 - \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

Luego la integral es convergente

1559 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$, a > 1

Desarrollo

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty}[\ln(\ln b) - \ln(\ln a)] = \lim_{b\to\infty}\ln(\frac{\ln b}{\ln a})$$

$= \ln(\frac{\infty}{a}) = \ln\infty = \infty$. Luego la integral es divergente

1560 $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$, a > 1

Desarrollo

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln x}\Big|_a^b = -\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{\ln b} - \frac{1}{\ln a}) = -\lim_{b\to\infty}\frac{\ln\frac{a}{b}}{\ln a.\ln b}$$

$= \lim_{b\to\infty}\frac{\ln\frac{b}{a}}{\ln a.\ln b} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}\ln a} = \frac{1}{\ln a}$. La integral es convergente.

1561 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} c\,\text{tg}\, x\, dx$

Desarrollo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} c\,\text{tg}\, x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} c\,\text{tg}\, x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln(\text{sen}\, x)\Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}) - \ln(\text{sen}\,\varepsilon))$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln 0) = 0 - \ln 0 \quad \nexists.$$ Luego la integral es divergente

1562 $\int_0^{\infty} e^{-kx} dx$

Desarrollo

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-kx} dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-kx}}{k}\Big|_0^b = -\frac{1}{k}\lim_{b\to\infty}(e^{-bx} - 1) = \frac{1}{k}$$

La integral es divergente

1563 $\int_0^{\infty} \frac{\text{arctg}\, x}{1+x^2} dx$

Desarrollo

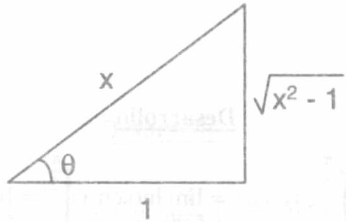
$$\int_0^{\infty} \frac{\text{arctg}\, x}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{\text{arctg}\, x}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty}\frac{\text{arctg}^2\, x}{2}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\frac{\text{arctg}^2\, b}{2} - \frac{\text{arctg}^2(0)}{2})$$

$$= \frac{\text{arctg}^2(\infty)}{2} - \frac{\text{arctg}^2(0)}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

1564 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

Desarrollo

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b} \frac{dx}{(x^2-1)^2} \quad \text{integrando} \quad \int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$$



Es decir: $\sec\theta = x$; $dx = \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \int \frac{\sec\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta-1)^2} = \int \frac{\sec\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{\operatorname{tg}^4\theta} = \int \sec\theta.c\operatorname{tg}^3\theta\, d\theta = \int c\operatorname{tg}^2\theta.\csc\theta\, d\theta$$

integrando por partes: $= -\frac{1}{2}[\csc\theta.c\operatorname{tg}\theta + \ln|\csc\theta - c\operatorname{tg}\theta|]$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2}[\frac{x}{x^2-1} + \ln|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}|] = -\frac{1}{2}[\frac{x}{x^2-1} + \ln|\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}|]$$

Luego: $\int_2^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}})\Big|_2^b$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}[(\frac{b}{b^2-1} + \ln\frac{b-1}{\sqrt{b^2-1}}) - (\frac{2}{3} + \ln\frac{1}{\sqrt{3}})]$$

$$= -\frac{1}{2}(0 - \frac{2}{3} + \ln\sqrt{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln\sqrt{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\ln 3$$

1565 $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$

Desarrollo

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^3+1} \quad \text{integrando} \quad \int \frac{dx}{x^3+1}$$

de acuerdo al ejercicio 1294 se tiene:

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{x}},$$ por tanto se tiene:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{b\to\infty}[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}]\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\frac{1}{6}\ln\frac{(b+1)^2}{(b^2-b+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2b-1}{\sqrt{3}}) - 0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$= 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\infty) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

1566 $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$

Desarrollo

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^3-5x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^1 (\frac{-\frac{1}{25}}{x} - \frac{\frac{1}{5}}{x^2} + \frac{\frac{1}{25}}{x-5})dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-\frac{1}{25}\ln x + \frac{1}{5x} + \frac{1}{25}\ln|x-5|)\Big|_{\varepsilon}^1$$

$$= 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\ln(-4) + \frac{1}{25}\ln 0 + \frac{2}{5(0)} + \frac{1}{25}\ln(0-5)$$

$$\nexists \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$$ por lo tanto la integral impropia es divergente.

1567 $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3}$

Desarrollo

Sea $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}\le\dfrac{1}{x^2+1}\quad\forall\ x>0$

$$\int_0^{100}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}\le\int_0^{100}\frac{dx}{x^2+1}.\ \text{Pero:}$$

$$\int_0^{100}\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^{100}=\operatorname{arctg}100\Rightarrow\int_0^{100}\frac{dx}{x^2+1}\text{, es convergente, por lo tanto}$$

$$\int_0^{100}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}\text{, es convergente}$$

1568 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$

Desarrollo

Sea $f(x)=\dfrac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}\ge\dfrac{1}{4x+5}$, puesto que

$$\sqrt[3]{x^2+1}\le 2x\ \Rightarrow\ 2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5\le 4x+5$$

$$\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}\ge\frac{1}{4x+5}\ \Rightarrow\ \int_1^{\infty}\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}\ge\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x+5}\text{, Pero:}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x+5}=\frac{1}{4}\ln|4x+5|\Big|_1^{\infty}=\infty-\frac{3}{4}\ln 3=\infty$$

Luego $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x+5}$ es divergente, por lo tanto $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$ es divergente

1569 $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$

Desarrollo

Sea $f(x)=\dfrac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}\le\dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall$ x > -1

Luego $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}\le\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$, de donde

$$\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

entonces $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ es convergente por lo tanto $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$ es convergente

1570 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$

Desarrollo

Sea $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^5+1}}\le\dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall$ x > 0

$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}\le\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ de donde se tiene: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

Luego $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ es convergente, por lo tanto: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$, es convergente.

1571 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$

Desarrollo

Sea $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-x^2)(1+x^2)}}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$, luego:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}} \le \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}\text{, de donde}$$

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{3}{4}(1+x^2)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}(2^{\frac{2}{3}}-1)$ entonces $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ es convergente, por lo tanto $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ es convergente.

1572 $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$

<u>**Desarrollo**</u>

Sea $f(x) = \frac{1}{\ln x} \ge \frac{1}{x\ln x}$

Entonces $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x} \ge \int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ de donde se tiene:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln(\ln 2) - \ln(\ln(1-\varepsilon)) = \ln(\ln 2) - \ln(\ln 1) = \ln(\ln 2) - \ln 0 = -\infty$$

Luego $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ es divergente, por lo tanto $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ es divergente.

1573 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$

<u>**Desarrollo**</u>

Sea $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ de donde $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ entonces

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}=-(0-\frac{2}{\pi})=\frac{2}{\pi}$$ por lo tanto $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ es convergente, de donde

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$ es convergente.

1574 Demostrar que la integral de Euler de primer especie (función Beta). $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, es convergente cuando $p>0$ y $q>0$.

Desarrollo

Sea $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ luego: $B(p,q)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$

$B(p,q)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$, por el criterio de comparación se tiene:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^{1-p}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1-q}f(x)=1$

esto cuando $1-p<1$ y $1-q<1$, de donde $p>0$ y $q>0$ en este caso las integrales $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ y $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ son convergentes, por tanto:

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ es convergente cuando $p>0$ y $q>0$.

1575 Demostrar que la integral de Euler, de segunda especie (función Gamma). $\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ es convergente cuando $p>0$.

Desarrollo

En $\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$, el factor $e^{-t}\to 0$ cuando t $\to\infty$, Luego:

$\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ converge en el límite superior para cualquier valor de P, en el límite inferior el factor $e^{-t}\to 1$, cuando t $\to$ 0 y el factor $t^{p-1}\to\infty$ cuando p < 1 y, para que sea convergente en el límite superior P debe ser positivo.

(El límite se obtiene por el Teorema deL'HOSPITAL)

NOTA.- $\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^{t} x^{p-1}e^{-x}dx$

5.4. CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL DEFINIDA.-

Consideremos f(x) una función continua en [a,b] y x = ψ(t) continua y $\psi'(t)$ continua en $\alpha\le t\le\beta$ donde a = ψ(α) y b = ψ(β) y además la función f(ψ(t)) continua en [α,β]. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f[\psi(t)].\psi'(t)dt$$

1576 Se puede calcular la integral $\int_0^2\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ valiéndose de las sustitución x = cos t?

Desarrollo

Sea $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}\;\Rightarrow\; f(\psi(t))=\sqrt[3]{1-\cos^2 t}=(\operatorname{sen} t)^{\frac{2}{3}}$

donde ψ(t) = cos t y $\psi'(t)=-\operatorname{sen} t$

$\int_0^2\sqrt[3]{1-x^2}\,dt=\int f(\psi(t))\psi'(t)dt$, donde x = cos t

$$\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos 2} (\operatorname{sen} t)^{\frac{2}{3}}(-\operatorname{sen} t)dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos 2} \operatorname{sen}^{\frac{5}{3}} t\,dt \text{ no se puede calcular}$$

Transformar las siguientes integrales definidas valiéndose de las sustituciones que se indican.

1577 $\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx$, $x = 2t - 1$

Desarrollo

$$\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx = 2\int_1^2 \sqrt{2t-1+1}\,dt = 2\int_1^2 \sqrt{2}\sqrt{t}\,dt = 2\sqrt{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt$$

1578 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Desarrollo

Sea $x = \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \cos t\,dt$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^4 t}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2 t)(1+\operatorname{sen}^2 t)}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\cos^2 t(1+\operatorname{sen}^2 t)}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}}$$

1579 $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = \operatorname{senh} t$

Desarrollo

$$\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\cosh t\,dt}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 t+1}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} dt, \text{ donde}$$

x = senh t $\Rightarrow$ dx = cosh t dt $\quad x = \operatorname{senh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

para $x = \dfrac{3}{4}$, t = ln 2, $x = \dfrac{4}{3}$, t = ln3

1580 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, x = arctg t

Desarrollo

x = arctg t $\Rightarrow$ $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

para x = 0 $\Rightarrow$ 0 = arctg t $\Rightarrow$ t = 0 $\Rightarrow$ $x = \dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} t$ $\Rightarrow$ t = ∞

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\infty} f(\operatorname{arctg} t)\frac{dt}{1+t^2}$$

1581 Para la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, (b > a) indicar una sustitución lineal entero x = αt + β que de por resultado que los límites de integración se hagan respectivamente iguales a: 0 y 1.

Desarrollo

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, como x = αt + β, la sustitución lineal entera entonces buscaremos α y β para que los límites de integración sean 0 y 1.

Luego: a = αt + β $\Rightarrow$ $t = \dfrac{a-\beta}{\alpha}$

b = αt + β $\Rightarrow$ $t = \dfrac{b-\beta}{\alpha}$

para $t=0 \Rightarrow \alpha=\beta$; $t=1 \Rightarrow \dfrac{\alpha=b-\beta}{\alpha=b-a}$

por tanto: $x=\alpha t+\beta$; $x=(b-a)t+a$

Utilizando las sustituciones que se indican, calcular las siguientes integrales:

1582 $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Desarrollo

Como $x=t^2 \Rightarrow x=t^2$

además para $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=4 \Rightarrow t=2$

Luego: $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t}=2\int_0^2 (1-\frac{1}{1+t})dy$

$$=2[t-\ln(1+t)]\Big|_0^2=2(2-\ln 3)-2(0-\ln 1)=4-2\ln 3$$

$\therefore\quad \displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=4-2\ln 3$

1583 $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}$, $x-2=z^3$

Desarrollo

Como $x-2=z^3 \Rightarrow dx=3z^2dz$

Para $x=3 \Rightarrow z=1$; $x=29 \Rightarrow z=3$

Luego: $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}=\int_1^3 \frac{z^2.3z^2dz}{z^2+3}=3\int_1^3 \frac{z^4dz}{z^2+3}$

$$= 3\int_1^3 (z^2 - 3 + \frac{9}{z^2+3})dz = 3(\frac{z^3}{3} - 3z + \frac{9}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}})\Big|_1^3$$

$$= 3(9 - 9 + \frac{9}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{5}}) - (\frac{1}{3} - 3 + \frac{9}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}))$$

$$= \frac{3\sqrt{3}\pi}{2} + 8 = \frac{9}{2\sqrt{3}}\pi + 8 \qquad \therefore \int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}} + 3} = 8 + \frac{9}{2\sqrt{3}}\pi$$

1584 $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$, $e^x - 1 = z^2$

Desarrollo

Como $e^x - 1 = z^2 \Rightarrow e^x dx = 2z\,dz$; $dx = \dfrac{2z\,dz}{z^2+1}$

Para $x = 0$, $z = 0$; $z = \ln 2$, $z = 1$

Luego: $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx = \int_0^1 \frac{2z^2 dz}{z^2+1} = 2\int_0^1 (1 - \frac{1}{z^2+1})dz = 2(z - \operatorname{arctg} z)\Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$

$\therefore \displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx = 2 - \frac{\pi}{2}$

1585 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{3 + 2\cos t}$, $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = z$

Desarrollo

Como $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = z \Rightarrow dt = \dfrac{2\,dz}{1+z^2}$ y $\cos t = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$

Para $t = 0$, $z = 0$; $t = \pi$, $z = \infty$

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{3+2\cos t}=\int_0^{\infty}\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3+\frac{2-2z^2}{1+z^2}}=\int_0^{\infty}\frac{2dz}{z^2+5}=2\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{dz}{z^2+5}=2\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{5}}\Big|_0^{b}$$

$$=2\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}0\right)=\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\infty-0=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore\quad \int_0^{\pi}\frac{dt}{3+2\cos t}=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

1586 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+a^2+\operatorname{sen}^2 x}$

Desarrollo

Como $\operatorname{tg} x = t \;\Rightarrow\; dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ además $\operatorname{sen} x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

Para $x=0,\ t=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}$, $t=\infty$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\operatorname{sen}^2 x}=\int_0^{\infty}\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{a^2t^2}{1+t^2}}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+a^2)t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{\sqrt{1+a^2}\,dt}{(1+a^2)t^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(\sqrt{1+a^2}\,t)\Big|_0^{b}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}\sqrt{1+a^2}\,b-\operatorname{arctg}0)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}[\operatorname{arctg}(\infty)-\operatorname{arctg}(0)]=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$$

$$\therefore\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$$

Valiéndose de sustituciones adecuadas, calcular las integrales:

1587 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

Desarrollo

Sea $x = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$

Para $x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$; $x=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

Luego: $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\, d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}c\operatorname{tg}^2\theta\, d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2\theta-1)d\theta=(-c\operatorname{tg}\theta-\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(-c\operatorname{tg}\theta-\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=(-0-\frac{\pi}{2})-(-1-\frac{\pi}{4})=1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

$\therefore \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=1-\frac{\pi}{4}$

1588 $\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

Desarrollo

Sea $x=\sec\theta \Rightarrow dx=\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta$

Para $x=1 \Rightarrow \theta=0$; $x=2 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$. Luego:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}\sec\theta.\text{tg}\,\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{tg}^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2\theta-1)d\theta = (\text{tg}\,\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = (\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})-(0-0) = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\quad \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

1589 $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}$

Desarrollo

$$e^x-1 = z^2 \;\Rightarrow\; dx = \frac{2z\,dz}{1+z^2}$$

para $x=0 \Rightarrow z=0$; $x=\ln 5 \Rightarrow z=2$. Luego:

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \int_0^2 \frac{(1+z^2)z}{z^2+4}.\frac{2z}{1+z^2}dz = 2\int_0^2 \frac{z^2dz}{z^2+4} = 2\int_0^2 (1-\frac{4}{z^2+4})dz$$

$$= 2(z-2arctg\frac{z}{2})\Big|_0^2 = 2(2-2\text{ arctg }(1))-2(0-2\text{ arctg }(0)) = 4-\pi$$

1590 $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

Desarrollo

Sea $3x+1 = z^2 \;\Rightarrow\; dx = \frac{2}{3}z\,dz$

Como $3x+1 = z^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{z^2-1}{3}$

Para $x=0 \Rightarrow z=1$; $x=5 \Rightarrow z=4$. Luego:

$$\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}} = \int_1^4 \frac{\frac{2}{3}z\,dz}{\frac{2}{3}(z^2-1)+z} = 2\int_1^4 \frac{z\,dz}{2z^2+3z-2}$$

$$= 2\int_1^4 \frac{z\,dz}{(2z-1)(z+2)} = 2\int_1^4 \left(\frac{\frac{1}{5}}{2z-1}+\frac{\frac{2}{5}}{z+2}\right)dz = \left[\frac{1}{5}\ln(2z-1)+\frac{4}{5}\ln(z+2)\right]\Big|_1^4$$

$$= \left(\frac{1}{5}\ln 7+\frac{4}{5}\ln 6\right)-\left(\frac{1}{5}\ln 1+\frac{4}{3}\ln 3\right) = \frac{1}{5}\ln 7+\frac{4}{5}\ln 3+\frac{4}{5}\ln 2-\frac{4}{5}\ln 3$$

$$= \frac{1}{5}\ln 7+\frac{4}{5}\ln 2 = \frac{1}{5}\ln 112$$

Calcular las integrales:

1591 $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

Desarrollo

Sea $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

Para $x=1 \Rightarrow t=1$; $x=3 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \int_1^{\frac{1}{3}} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}} = -\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{5}{2})^2-\frac{21}{4}}}$$

$$= \ln\left|\left(\frac{5}{2}+t\right)+\sqrt{t^2+5t+1}\right|\Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \ln\left|\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right|-\ln\left|\frac{17}{6}+\sqrt{\frac{25}{9}}\right|$$

$$= \ln \frac{7+2\sqrt{7}}{2} - \ln \frac{9}{2} = \ln \left| \frac{7+2\sqrt{7}}{9} \right|$$

1592 $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Desarrollo

$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}$, de acuerdo al ejercicio 1297

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{\operatorname{arctg}(1)}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \operatorname{arctg}(1) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

1593 $\int_{0}^{a} \sqrt{ax - x^2}\, dx$

Desarrollo

$$\int_{0}^{a} \sqrt{ax-x^2}\, dx = \int_{0}^{a} \sqrt{\frac{a^2}{4} - (x-\frac{a}{2})^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[(x-\frac{a}{2})\sqrt{ax-x^2} + \frac{a^2}{4} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right)\right]\Bigg|_{0}^{a}$$

$$= \left(\frac{2x-a}{4}\sqrt{ax-x^2} + \frac{a^2}{8} \operatorname{arcsen} \frac{2x-a}{a}\right)\Bigg|_{0}^{a}$$

$$= (0 + \frac{a^2}{8} \operatorname{arcsen}(1)) - (0 + \frac{a^2}{8} \operatorname{arcsen}(-1)) = \frac{a^2}{4} \operatorname{arcsen}(1) = \frac{a^2 \pi}{8}$$

1594 $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3\cos x}$

Desarrollo

Sean $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5-3\cos x}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5-\frac{3-3z^2}{1+z^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{2dz}{4z^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2z\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2})\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}(\frac{x}{2}))\Big|_0^{\pi}=arctg\,2tg(\frac{\pi}{2})-arctg(2tg(0))$$

$$=\operatorname{arctg}\infty-\operatorname{arctg}(0)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

1595 Demostrar que si f(x) es una función par $\int_a^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$. Si por el contrario f(x) es una función impar $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

Desarrollo

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx \qquad \textbf{... (1)}$$

como f(x) es par $\Rightarrow$ f(x) = f(-x)

Sea x = -y $\Rightarrow$ dx = -dy

$\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_0^{-a} f(x)dx$, para x = 0 $\Rightarrow$ y = 0; x = -a $\Rightarrow$ y = a. Luego:

$$\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_0^{-a} f(x)dx=-\int_0^a f(-y)(-y)=-\int_0^a f(y)-(dy)$$

$$=\int_0^a f(y)dy=\int_0^a f(x)dx$$

por lo tanto $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$ ... (2)

reemplazando (2) en (1): $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ en forma análoga para f(x) impar.

1596 Demostrar que: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}}$

Desarrollo

$f(x) = e^{-x^2}$ es simétrica respecto al eje "Y".

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$= \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$; por la simetría ahora demostraremos que:

$2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Sea $z^2 = x \Rightarrow$ dx = 2z dz

Como $z^2 = x \Rightarrow \sqrt{x} = z$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}} = \int_{0}^{\infty} e^{-z^2} \frac{2z}{z} dz = 2\int_{0}^{\infty} e^{-z^2} dz = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

1597 Demostrar que: $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\arccos x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$

Desarrollo

Sea arccos x = z $\Rightarrow$ x = cos z ; dx = sen z dz

Para x= 0 $\Rightarrow$ $z = \frac{\pi}{2}$; x = 1 $\Rightarrow$ z = 0

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\operatorname{sen} z\, dz}{z} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

Luego: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$

1598 Demostrar que: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

<u>**Desarrollo**</u>

Sea $z = \operatorname{sen} x \Rightarrow \sqrt{1-z^2} = \cos x$

$dz = \cos x\, dx \Rightarrow \dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = dx$

para $x = 0 \Rightarrow z = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)dx = \int_0^1 f(z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \qquad \ldots (1)$$

sea $y = \cos x \Rightarrow dy = -\operatorname{sen} x\, dx$

como $\sqrt{1-y^2} = \operatorname{sen} x \Rightarrow -\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$

para $x = 0 \Rightarrow y = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_1^0 f(y)(\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}})) = \int_0^1 f(y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 f(z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \ldots (2)$$

de (1) y (2) se obtiene: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

5.5. INTEGRACION POR PARTES.-

Calcular las siguientes integrales, empleando la fórmula de integración por partes:

1599 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (x\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - (0+1) = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

1600 $\int_1^e \ln x\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e = (e-e) - (0-1) = 1$$

1601 $\int_0^1 x^3 e^{2x}\,dx$

Desarrollo

Haciendo $\begin{cases} u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$$\int_0^1 x^3 e^{2x}dx = \frac{x^3}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 x^2 e^{2x}dx$$

Haciendo $\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$$\int_0^1 x^3 e^{2x}dx = (\frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x})\Big|_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 xe^{2x}dx$$

$$= (\frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x})\Big|_0^1 + (\frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x})\Big|_0^1$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4})\Big|_0^1 = \frac{e^2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{e^2+3}{8}$$

1602 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx$

<u>Desarrollo</u>

$\begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

$\begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

Luego: $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}(1) - \frac{1}{2}(0-1) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$

1603 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

Desarrollo

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1)$, Luego:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}(x+1)\Big|_0^b = -\lim_{b\to\infty}(\frac{b+1}{e^b}-1) = -(0-1) = 1$$

1604 $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$, (a > 0)

Desarrollo

$$\begin{cases} u = e^{-ax} \Rightarrow du = -ae^{-ax}dx \\ dv = \cos bx\,dx \Rightarrow v = \dfrac{\operatorname{sen} bx}{b} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{-ax}\operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a}{b}\int_0^{\infty} e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx$$

$$\begin{cases} u = e^{-ax} \Rightarrow du = -ae^{-ax}dx \\ dv = \operatorname{sen} bx\,dx \Rightarrow v = -\dfrac{\cos bx}{b} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{-ax}\operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a}{b}(\frac{-e^{ax}\cos bx}{b} - \frac{a}{b}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx)$$

$$= be^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx - ae^{-ax}\cos bx}{b^2}\Big|_0^{\infty} - \frac{a^2}{b^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$$

$$\frac{b^2+a^2}{b^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{be^{-ax}\operatorname{sen} bx - ae^{-ax}\cos bx}{b^2}\Big|_0^{\infty}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{-ax}(b\operatorname{sen} bx - a\cos bx)}{b^2+a^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{0-(0-a)}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

1605 $\int_0^{\infty} e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx$, $a > 0$

Desarrollo

$$\begin{cases} u = e^{-ax} \Rightarrow du = -ae^{-ax}dx \\ dv = \operatorname{sen} bx\,dx \Rightarrow v = -\dfrac{\cos bx}{b} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx = -\frac{e^{-ax}\cos bx}{b} - \frac{a}{b}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$$

$$\begin{cases} u = e^{-ax} \Rightarrow du = -ae^{-ax}dx \\ dv = \cos bx\,dx \Rightarrow v = -\dfrac{\operatorname{sen} bx}{b} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx = -\frac{e^{-ax}\cos bx}{b}.\frac{a}{b}.\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}\operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a}{b}\int_0^{\infty} e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$$

$$= -e^{-ax}\left(\frac{b\cos bx + a\operatorname{sen} bx}{b^2}\right) - \frac{a^2}{b^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx$$

$$= -e^{-ax}\left(\frac{b\cos bx + a\operatorname{sen} bx}{a^2+b^2}\right) = -e^{-ax}\left(\frac{b\cos bx + a\operatorname{sen} bx}{a^2+b^2}\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$= -0 + \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

1606 Demostrar que para la función Gamma es válida la fórmula de reducción: $\Gamma(p + 1) = P\Gamma(p)$, $p > 0$, se deduce que $\Gamma(n + 1) = n!$ Si n es un número natural.

Desarrollo

La función Gamma por definición es: $\Gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-u}u^{p-1}du$ para $u > 0$

sustituyendo p por p + 1 $\Gamma(p+1)=\int_0^{\infty} e^{-u}u^{p}du$, integrando por partes:

$$\begin{cases} w=u^p & \Rightarrow dw=pu^{p-1}du \\ dv=e^{-u}du & \Rightarrow v=-e^{-u} \end{cases}$$

$$\Gamma(p+1)=-e^{-u}.u^p\Big|_0^{\infty}+p\int_0^{\infty} e^{-u}u^{p-1}du$$

como $p>0 \Rightarrow e^{-u}\to 0$, cuando $u\to\infty$ puesto que p es fija, $e^{-u}u^p\to 0$, cuando $u\to\infty$. Luego: $\Gamma(p+1)=p\int_0^{\infty} e^{-u}u^{p-1}du$

$\Gamma(p + 1) = p\Gamma(P)$ de esto se obtiene:

$\Gamma(n + 1) = n\Gamma((n - 1) + 1) = n(n - 1)\Gamma(n - 1)$

$\Gamma(n + 1) = n(n - 1)(n - 2) \ldots 2.1$ **... (1)**

$\Gamma(n + 1) = n!$.

1607 Demostrar que para la integral $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ es válido la fórmula de reducción: $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. Hallar I_n, si n es número natural, utilizando la fórmula obtenida. Calcular I_9 e I_{10}

Desarrollo

Se conoce: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x.\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x.\operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

Luego: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x.\cos x}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \ldots (1)$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} .\operatorname{sen} x}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx \Rightarrow I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ldots (2)$$

de (1) y (2) se obtiene:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}.\frac{\pi}{2} \quad \text{n par y n} > 1$$

$$= \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-2)n}, \text{ n impar y n} > 1$$

1608 Calcular la integral siguiente empleando reiteradamente la integral por partes:

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, donde p y q son enteros y positivos.

Desarrollo

$$\begin{cases} u=x^{p-1} \Rightarrow du=(p-1)x^{p-2}dx \\ dv=(1-x)^{q-1}dx \Rightarrow v=-\dfrac{(1-x)^q}{q} \end{cases}$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-\frac{x^{p-1}.(1-x)^q}{q}\Big|_0^1+\frac{p-1}{q}\int_0^1 x^{p-2}(1-x)^q dx$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{q}\int_0^1 x^{p-2}(1-x)^q dx$$

$$\text{Haciendo } \begin{cases} u=x^{p-2} \Rightarrow du=(p-2)x^{p-3}dx \\ dv=(1-x)^q dx \Rightarrow v=-\dfrac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \end{cases}$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{q}[(-x^{p-2}\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1})\Big|_0^1+\frac{p-2}{q+1}\int_0^1 x^{p-3}(1-x)^{q+1}dx]$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{q+1}.\frac{p-2}{q+1}\int_0^1 x^{p-3}(1-x)^{q+1}dx$$

$$\text{Haciendo } \begin{cases} u=x^{p-3} \Rightarrow du=(p-3)x^{p-4}dx \\ dv=(1-x)^{q+1}dx \Rightarrow v=-\dfrac{(1-x)^{q+2}}{q+2} \end{cases}$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{q}.\frac{p-2}{q+1}((-\frac{x^{p-3}(1-x)^{q+2}}{q+2})\Big|_0^1+\frac{p-3}{q+2}\int_0^1 x^{p-4}(1-x)^{q+2}dx)$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{q}.\frac{p-2}{q+1}.\frac{p-3}{q+2}\int_0^1 x^{p-4}(1-x)^{q+2}dx$$

continuando con este procedimiento se llega $B(p,q)=\frac{(p-1)!(q-1)°}{(p+q-1)!}$

1609 Expresar por medio de B (función Beta) la integral $I_{n,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^m x.\cos^n x\,dx$, Si m y n son números enteros no negativos.

Desarrollo

Sea $t=\text{sen}^2 x \Rightarrow 1-t=\cos^2 x$

dt = 2 sen x. cos x dx $\Rightarrow$ $dx=\frac{1}{2}\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}$

para x = 0, t = 0 ; $x=\frac{\pi}{2}$, t = 1

$$I_{n,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^m x.\cos^n x\,dx=\int_0^1\frac{t^{\frac{m}{2}}.(1-t)^{\frac{n}{2}}dt}{2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}.(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt=\frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2})$$

5.6. TEOREMA DEL VALOR MEDIO.-

1 ACOTACIÓN DE LAS INTEGRALES.-

Si f(x) ≤ F(x) para a ≤ x ≤ b, se tiene $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b F(x)dx$; Si f(x) y ψ(x) son continuas para a ≤ x ≤ b y además ψ(x) ≥ 0, se tiene:

$$m\int_a^b\psi(x)dx\le\int_a^b f(x)\psi(x)dx\le M\int_a^b\psi(x)dx \qquad ...(1)$$

donde m es el valor mínimo absoluto y M es el valor máximo absoluto de la función f(x) en el segmento [a,b]. El particular cuando $\psi(x) = 1$, se tiene:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad \text{... (2)}$$

De (1) y (2) se puede sustituir por sus respectivas igualdades equivalentes.

$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = f(c)\int_a^b \psi(x)dx$ y $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ donde c y ξ, son números que se encuentran entre a y b.

(2) VALOR MEDIO DE LA FUNCION.-

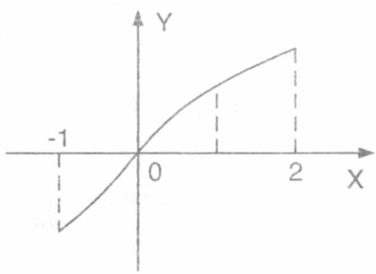
El número $u = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se llama valor medio de la función f(x) en el segmento $a \le x \le b$.

1610 Determinar el signo de las integrales siguientes sin calcular las:

a) $\int_{-1}^{2} x^3 dx$ b) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$ c) $\int_0^{2\pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} dx$

Desarrollo

a) Graficando $f(x) = x^3$

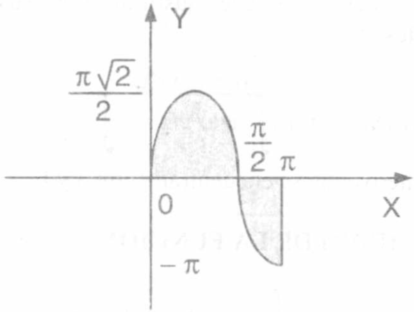


Luego $\int_{-1}^{2} x^2 dx$, tiene signo más (+).

NOTA: Para determinar el signo de la integral sin calcular, se hace el grafico en el segmento indicado.

La región de la parte superior del eje X es positiva, y la parte inferior del eje X es negativa.

b) Haciendo la grafica de $f(x) = x \cos x$



Luego la integral $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$, tiene signo menos (-), en forma análoga para c) tiene el signo mas (+).

1611 Determinar (sin cálculos), cual de las siguientes integrales es mayor.

a) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}$ o $\int_0^1 x\,dx$

Desarrollo

$\forall$ x $\in$ R , $1+x^2 \geq x^2$; $\sqrt{1+x^2} \geq x$

tomando integrales $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \geq \int_0^1 x\,dx$. Luego el primero es mayor

b) $\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x\,dx$ o $\int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Desarrollo

$\forall$ x $\in$ [0,1] $\Rightarrow$ $x^2 \le x$, luego $x^2 \operatorname{sen}^2 x \le x \operatorname{sen}^2 x$

tomando integrales $\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x\,dx \le \int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

Luego el segundo es mayor.

c) $\int_1^2 e^{x^2} dx$ o $\int_1^2 e^x dx$

Desarrollo

$\forall$ x $\in$ [1,2] $\Rightarrow$ $x^2 \ge x$, de donde $e^{x^2} \ge e^x$, integrando de 1 a 2

$\int_1^2 e^{x^2} dx \ge \int_1^2 e^x dx$, luego el primero es mayor.

Hallar los valores medios de las siguientes funciones en el segmento que se indican.

1612 $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 1$

Desarrollo

El valor medio de la función es: $u = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, luego:

$$u = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{3}$$

$$u = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$u = \frac{1}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi}(a + b\cos x)dx = \frac{1}{2\pi}(ax + bsenx)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$u=\frac{1}{2\pi}[(a\pi+0)-(-a\pi+0)]=\frac{2a\pi}{2\pi}$$

1613 f(x) = a + b cos x, $-\pi \le x \le \pi$

Desarrollo

El valor medio de la función es:

$$u=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\text{, luego}\quad u=\frac{1}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi}(a+b\cos x)dx$$

$$u=\frac{1}{2\pi}(ax+b\operatorname{sen}x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}[(a+0)-(-a\pi+0)]=\frac{2a\pi}{2\pi}.\quad \text{Luego } u=a$$

1614 $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$, $0\le x\le\pi$

Desarrollo

El valor medio de la función es:

$$u=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\text{, luego } u=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx$$

$$u=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{u}(\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4})\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}[(\frac{\pi}{2}-0)-(0-0)]=\frac{1}{2}$$

1615 $f(x)=\operatorname{sen}^4 x$

Desarrollo

El valor medio de la función es: $u=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Luego se tiene:

$$u=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1-\cos 2x}{2})^2dx$$

$$u=\frac{1}{u}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x+2\cos^2 2x}{4}dx=\frac{1}{4\pi}(x-\operatorname{sen}2x+\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}4x}{8})\Big|_0^{\pi}$$

$$u=\frac{1}{4\pi}(\pi-0+\frac{\pi}{2}+0)=\frac{3\pi}{8\pi}=\frac{3}{8}$$

1616 Demostrar que la integral $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ está comprendida entre $\frac{2}{3}\approx 0.67$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.70$

Desarrollo

$2+x-x^2=\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$, para $x\in[0,1]\Rightarrow 0\le x\le 1$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}\le x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ |x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ 0\le|x-\frac{1}{2}|^2\le\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ -\frac{1}{4}\le-(x-\frac{1}{2})^2\le 0$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\le\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\le\frac{9}{4}\ \Rightarrow\ 2\le\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\le\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow\ 2\le 2+x-x^2\le\frac{9}{4}\ \Rightarrow\ \sqrt{2}\le\sqrt{2+x-x^2}\le\frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{3}\le\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \int_0^1\frac{2}{3}dx<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{3}x\Big|_0^1\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}\le\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1$$

$\frac{2}{3}\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ luego la integral $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ esta comprendida entre $\frac{2}{3}\approx 0.67$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.70$ ahora el valor exacto es:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \operatorname{arcsen}(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}})\Big|_0^1 = \operatorname{arcsen}(\frac{2x-1}{3})\Big|_0^1$$

$$= \operatorname{arcsen}(\frac{1}{3}) - \operatorname{arcsen}(-\frac{1}{3}) = 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}$$

Acotar las integrales:

1617 $\int_{-1}^1 \sqrt{4+x^2}\,dx$

Desarrollo

$\forall$ x $\in$ [0,1] $\Rightarrow$ $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 4 \le 4+x^2 \le 5 \Rightarrow 2 \le \sqrt{4+x^2} \le \sqrt{5}$

$\Rightarrow \int_0^1 2\,dx \le \int_0^1 \sqrt{4+x^2} \le \int_0^1 \sqrt{5}\,dx$. Luego $2 \le I \le \sqrt{5}$

1618 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}$

Desarrollo

Si x $\in$ [-1,1] $\Rightarrow$ $-1 \le x \le 1$

$-1 \le x^3 \le 1 \Rightarrow 7 \le x^2+8 \le 9 \Rightarrow \frac{1}{9} \le \frac{1}{x^3+8} \le \frac{1}{7}$

Luego: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{9} \le \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3+8} \le \int_{-1}^1 \frac{dx}{7}$

$\frac{x}{9}\Big|_{-1}^1 \le \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3+8} \le \frac{x}{7}\Big|_{-1}^1 \Rightarrow \frac{2}{9} \le \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3+8} \le \frac{2}{7}$. Por lo tanto: $\frac{2}{9} \le I \le \frac{2}{7}$

1619 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$

Desarrollo

Se oonoce que: $-1 \le \cos x \le 1$; $-3 \le 3\cos x \le 3$

$7 \le 10 + 3\cos x \le 13$; $\frac{1}{13} \le \frac{1}{10+3\cos x} \le \frac{1}{7}$

Luego tomando integrales se tiene: $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{13} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{7}$

$\frac{2\pi}{13} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \le \frac{2\pi}{7}$, por tanto: $\frac{2\pi}{13} \le I \le \frac{2\pi}{7}$

1620 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$

Desarrollo

Como la función crece monótamente $0 \le \sqrt{\operatorname{tg} x} \le 1$ para $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$0 \le x\sqrt{\operatorname{tg} x} \le x$ tomando integral

$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,dx$; $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx \le \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx \le \frac{\pi^2}{32}$; luego: $0 \le I \le \frac{\pi^2}{32}$

1621 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

Desarrollo

En forma análoga a los demás $\frac{1}{2} \le I \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

1622 Integrando por partes, demostrar que: $0 < \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx < \frac{1}{100\pi}$ análoga al ejercicio 1609, por tanto dejamos para el lector.

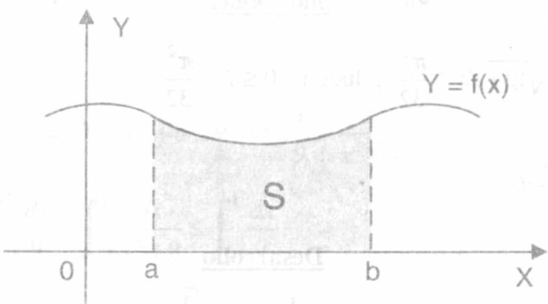
CAPITULO VI

6. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

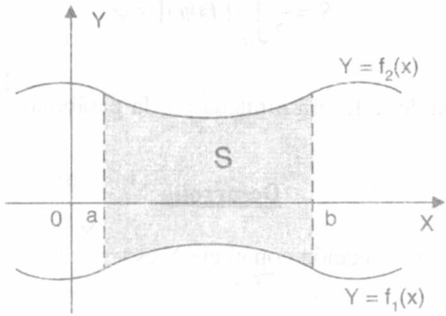
6.1. AREAS DE LAS FIGURAS PLANAS.-

(1) EL AREA EN COORDENADAS CARTESIANAS.-

Se determina por la fórmula $S=\int_a^b f(x)dx$, donde $y = f(x) \geq 0$, que es el área del trapecio mixtilíneo, limitado por dicha curva, dos verticales en los puntos $x = a$ y $x = b$ y el segmento $a \leq x \leq b$.



En un caso más general, cuando el área S de la figura limitada por dos curvas continuas $y=f_1(x)$ e $y=f_2(x)$ y por dos verticales $x = a$ y $x = b$, donde $f_1(x) \leq f_2(x)$



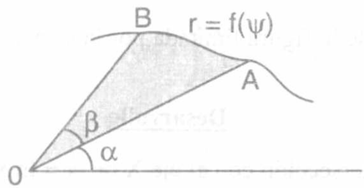
Para $a \le x \le b$ tenemos: $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$. Si las curvas se dan en forma paramétrica: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, el área del trapecio mixtilíneo limitado por esta curva y dos verticales, $x = a$ e $y = b$, respectivamente y por el segmento del eje X, se obtiene:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt, \text{ donde } t_1 \text{ y } t_2$$

se determinan de las ecuaciones: $a = \varphi(t_1)$ y $b = \varphi(t_2)$ $(\varphi \ge 0)$ en el segmento $[t_1, t_2]$

(2) AREA EN COORDENADAS POLARES.-

Si la curva continua, se da en coordenadas polares por una ecuación $r = f(\psi)$, el área del sector AOB, limitado por el arco de la curva y los radios polares OA y OB, correspondientes a los valores $\psi_1 = \alpha$, $\psi_2 = \beta$, se expresa por la integral:



$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\psi)]^2 d\psi$$

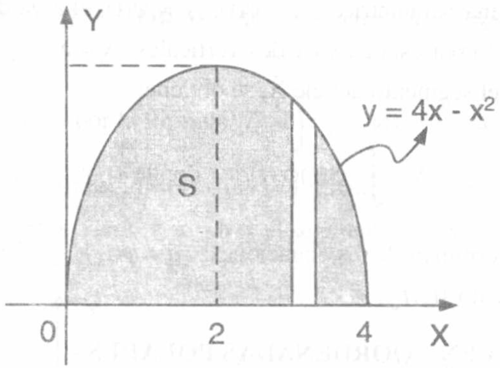
1623 Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje de abcisas.

Desarrollo

$y = 4x - x^2$ la intersección con el eje X es:

para $y = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0$; $x = 0$; $x = 4$

como $y = 4x - x^2 \Rightarrow y - 4 = -(x-2)^2$, es una parábola



$$S = \int_0^4 y\,dy = \int_0^4 (4x - x^2)dx = (2x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = (32 - \frac{64}{3}) - 0 = \frac{32}{3}.$$

Luego: $S = \frac{32}{3}u^2$

1624 Calcular el área de la figura limitada por la curva $y = \ln x$, el eje OX y la recta $x = e$.

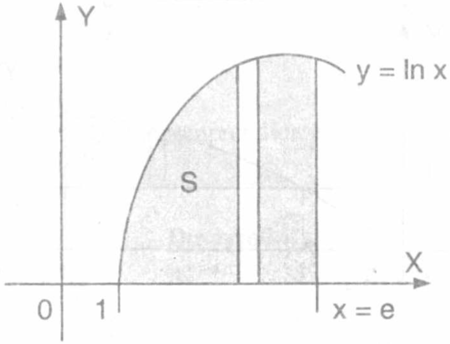
Desarrollo

Hallaremos la intersección con el eje X de $y = \ln x$.

Luego: para $y = 0$; $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

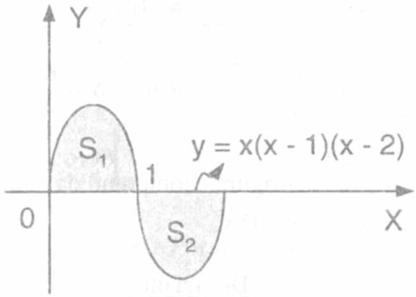
$$S = \int_1^e y\,dx = \int_1^e \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e$$

$S = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = (e - e) - (0 - 1)$; luego $S = 1\ u^2$



1625 Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX.

Desarrollo



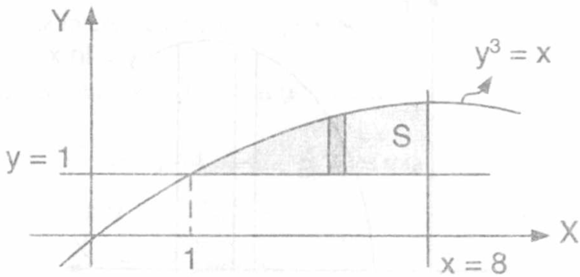
$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)dx$$

$$S = (\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2)\Big|_0^1 + (-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2)\Big|_1^2$$

$$S=(\frac{1}{4}-1+1)-(0)+(-\frac{16}{4}+8-4)-(-\frac{1}{4}+1-1) \qquad \therefore S=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}u^2$$

1626 Hallar el área de la figura limitada por la curva $y^3=x$, la recta y = 1, la vertical x = 8.

Desarrollo



$$y^3=x \Rightarrow y=\sqrt[3]{x}$$

$$S=\int_1^8 (y-1)dx=\int_1^8 (\sqrt[3]{x}-1)dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8 - x\Big|_1^8$$

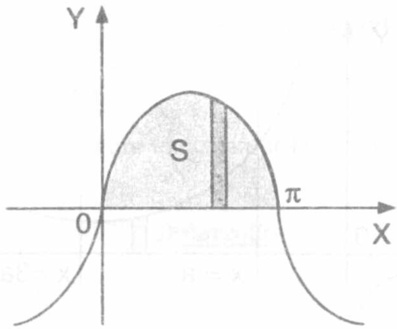
$$S=\frac{3}{4}(16-1)-(8-1)=\frac{45}{4}-\frac{17}{4};\ \text{ luego: } \quad S=\frac{17}{4}u^2$$

1627 Calcular el área de la figura comprendida entre una semionda de la sinusoide y = sen x y el eje OX.

Desarrollo

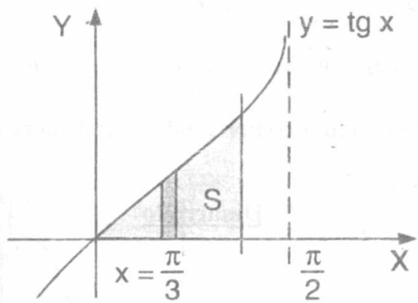
$$S=\int_0^\pi y\,dx=\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx=\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2$$

Por lo tanto: $S=2u^2$



1628 Calcular el área de la figura comprendida entre la curva y = tg x, el eje OX, las rectas $x=\dfrac{\pi}{3}$

Desarrollo



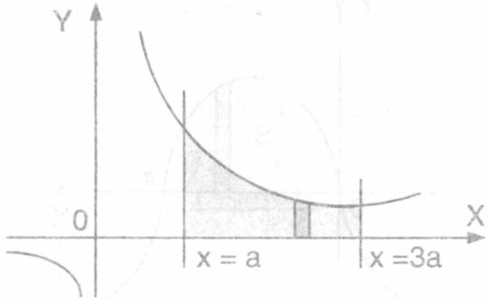
$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x\,dx=\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-(\ln(\cos\frac{\pi}{3})-\ln(\cos 0))$$

$S=-(\ln\dfrac{1}{2}-\ln 1)=-(-\ln 2)$. Por lo tanto: $S=\ln 2\ u^2$

1629 Hallar el área de la figura comprendida entre la hipérbola $xy=m^2$, los verticales x = a, x = 3a (a > 0) y el eje OX.

Desarrollo

El grafico de $xy=m^2$ es:



Como $xy = m^2 \Rightarrow y = \dfrac{m^2}{x}$

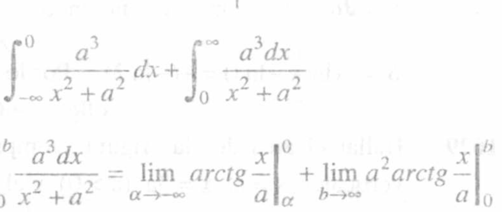
$$S = \int_a^{3a} y\,dx = \int_a^{3a} \frac{m^2}{x} dx = m^2 \ln x \Big|_a^{3a}$$

$S = m^2(\ln 3a - \ln a) = m^2 \ln 3$ por lo tanto: $S = m^2 \ln 3\ u^2$

1630 Hallar el área de la figura comprendida entre la curva de Agnesi. $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ y el eje de abcisas.

Desarrollo

El grafico de $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ es:



$$S = \int_{-\infty}^{\infty} y\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{a^3 dx}{x^2 + a^2}$$

$$S = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^0 \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx + \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{a^3 dx}{x^2 + a^2} = \lim_{\alpha \to -\infty} arctg \frac{x}{a}\Big|_\alpha^0 + \lim_{b \to \infty} a^2 arctg \frac{x}{a}\Big|_0^b$$

$$S = \lim_{\alpha \to -\infty} (a^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - a^2 \operatorname{arctg}(0)) + \lim_{b \to \infty} (a^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - a^2 \operatorname{arctg}(0))$$

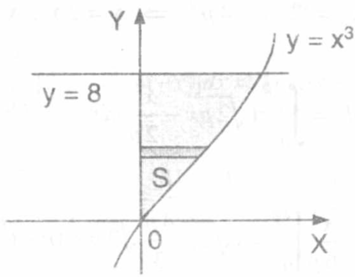
$$S = 0 - a^2 \text{ arctg}(-\infty) + a^2 \text{ arctg}(\infty) - 0 = 2a^2 arctg(\infty) = a^2\pi$$

por lo tanto: $S = a^2\pi \ u^2$

1631 Calcular el área de la figura limitada por la curva $y = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje OY.

Desarrollo

El grafico de $y = x^3$ es:

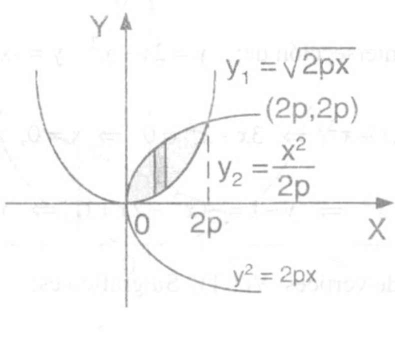


Como $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

$$S = \int_0^8 x\,dy = \int_0^8 \sqrt[3]{y}\,dy = \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \Big|_0^8 = \frac{3}{4}(16 - 0)$$. Por lo tanto: $S = 12 \ u^2$

1632 Hallar el área de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 2px$ y $x^2 = 2py$

Desarrollo



Buscaremos la intersección entre las curvas $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$

como $x^2 = 2py \Rightarrow y = \frac{x^2}{2p}$. Reemplazando en $y^2 = 2px$

$\frac{x^4}{4p^2} = 2px \Rightarrow x^3 = 8p^2 \Rightarrow$ x = 2p y x = 0

para x = 2p $\Rightarrow y^2 = 2px = 4p^2 \Rightarrow$ y = 2p , x = 0 $\Rightarrow$ y = 0

$$S = \int_0^{2p} (y_1 - y_2)dx = \int_0^{2p} (\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p})dx$$

$$S = \sqrt{2p}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2p} - \frac{x^3}{6p}\Big|_0^{2p} = (\sqrt{2p}\,\frac{4p}{3}\sqrt{2p} - 0) - (\frac{8p^3}{6p} - 0)$$

$S = \frac{8p^2}{3} - \frac{4p^2}{3} = \frac{4}{3}p^2$. Por lo tanto: $S = \frac{4}{3}p^2\ u^2$

1633 Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = 2x - x^2$ y la recta y = -x

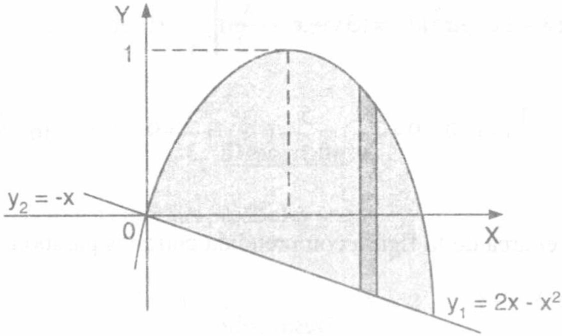
Desarrollo

Buscaremos la intersección de: $y = 2x - x^2$, y = -x

Luego: $-x = 2x - x^2 \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow$ x = 0, x = 3

Como $y = 2x - x^2 \Rightarrow y - 1 = -(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow y - 1 = -(x-1)^2$

Es un parábola de vértices V(1,1). Su gráfico es:



$$S=\int_0^3 (y_1-y_2)dx=\int_0^3 [2x-x^2-(-x)]dx=\int_0^3 (3x-x^2)dx$$

$$=(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^3=(\frac{27}{3}-\frac{27}{3})-0=\frac{81-54}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}.\ \text{Por tanto:}\quad S=4\frac{1}{2}u^2$$

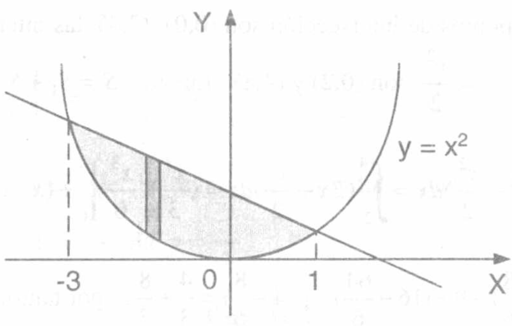
1634 Calcular el área del segmento de la parábola $y=x^2$ que corta la recta $y = 3-2x$

Desarrollo

Los puntos de intersección son:

$y=x^2$; $y = 3-2x \Rightarrow x^2=3-2x \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow x = 1$

para $x = -3,\ y=9$; $x = 1,\ y = 1$. Su gráfico es:



$$S=\int_{-3}^{1}[(3-2x)-x^2]dx=(3x-x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_{-3}^{1}$$

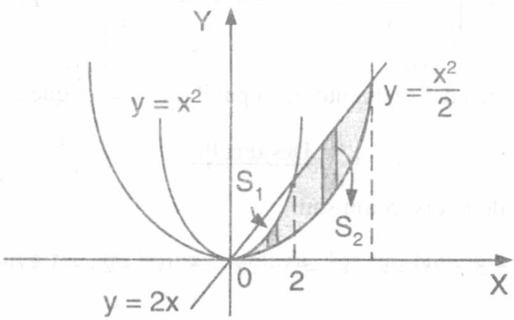
$S=(3-1-\frac{1}{3})-(-9-9+\frac{27}{3})=\frac{5}{3}-(-9)=\frac{5}{3}+9$. Por tanto $S=\frac{32}{3}u^2=10\frac{2}{3}u^2$

1635 Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{2}$ y la recta y = 2x.

Desarrollo

Las intersecciones de las rectas y = 2x

Con la parábola $y=x^2$ son $x^2=2x \Rightarrow$ x = 0 o x = 2



Luego los puntos de intersección son (0,0), (2,4), las intersecciones de la recta y = 2x con $y=\frac{x^2}{2}$ son (0,2) y (4,8). Luego: $S=S_1+S_2$

$$S=\int_0^2(x^2-\frac{x^2}{2})dx=\int_2^4(2x-\frac{x^2}{2})dx=(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{6})\Big|_0^2+(x^2+\frac{x^3}{6})\Big|_2^4$$

$$=(\frac{8}{3}-\frac{8}{6})-0+(16-\frac{64}{6})-(-4-\frac{8}{6})=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}.\quad \text{por tanto: } S=\frac{12}{3}=4\ u^2$$

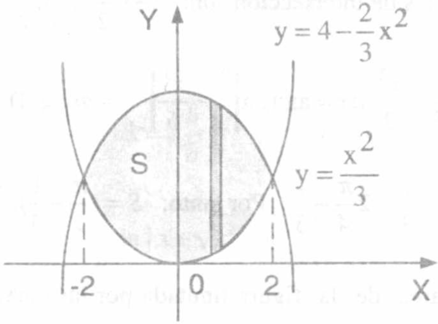
1636 Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = \frac{x^2}{3}$, $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$

Desarrollo

Las intersecciones entre las parábolas son:

$$\frac{x^2}{3} = 4 - \frac{2}{3}x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 2$$

Luego los puntos de intersección $(-2, \frac{4}{3})$, $(2, \frac{4}{3})$. Su grafico es:



$$S = \int_{-2}^{2} (4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{x^2}{3})dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$$

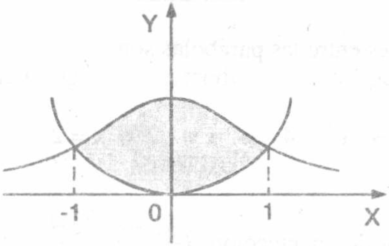
$$S = (4x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{2} = (8 - \frac{8}{3}) - (8 + \frac{8}{3}) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}u^2$$

1637 Calcular el área de la figura comprendida entre las curva de Agnesi: $y = \frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$.

Desarrollo

Las intersecciones entre la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y=\frac{x^2}{2}$, son:

$\frac{x^2}{2}=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$ x = -1, x = 1



Luego los puntos de intersección son: $(-1,\frac{1}{2})$, $(1,\frac{1}{2})$

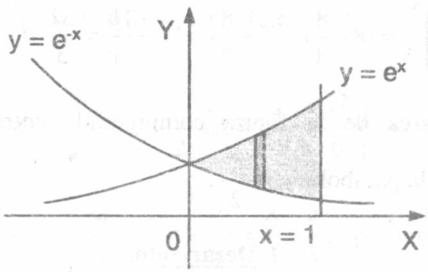
$$S=\int_{-1}^{1}(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2})dx=\operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{0}-\frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1}=arctg(1)-arctg(-1)-[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}]$$

$S=2arctg(1)-\frac{1}{3}=2\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$. Por tanto: $S=(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3})u^2$

1638 Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y la recta x = 1.

Desarrollo

La región comprendida por las curvas y la recta es:



$$S=\int_0^1 (e^x-e^{-x})dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^1$$

$$S=(e+e^{-1})-2=\frac{e^2+1-2e}{e}\quad \text{por tanto:}\quad S=\frac{(e-1)^2}{e}u^2$$

1639 Hallar el área de la figura limitada por la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y la recta x= 2a

Desarrollo

Como: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2 \quad ; \quad y=\pm\frac{\sqrt{b^2x^2-a^2b^2}}{a}$$

$$S=2\int_a^{2a}\frac{\sqrt{b^2x^2-a^2b^2}}{a}dx=2\frac{b}{a}\int_a^{2a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

$$S=\frac{2b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}\,|\right)\Big|_a^{2a}$$

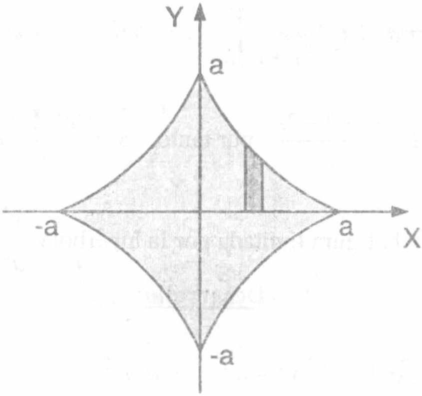
$$S=\frac{b}{a}[(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln|x+x^2-a^2\,|)]\Big|_a^{2a}$$

$$S=\frac{b}{a}[(2a\sqrt{4a^2-a^2}-a^2\ln(2a+\sqrt{4a^2-a^2}\,))+\ln a]$$

$$S=\frac{b}{a}[2a^2\sqrt{3}-a^2\ln(\frac{2a+a\sqrt{3}}{a})]=ab[2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})]u^2$$

1640 Hallar el área limitada por la astroide: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

Desarrollo

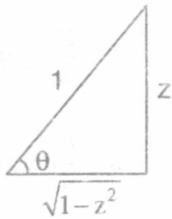


Como las cuatro regiones son simétricas se tiene:

$$S=4\int_0^a y\,dx=4\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx\,.\ \text{Sea}\quad x=az^3 \ \Rightarrow\ dx=3az^2dz$$

$$S=4\int_0^1 (a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}z^2)^{\frac{3}{2}}3az^2dz=12a^2\int_0^1 (1-z^2)^{\frac{3}{2}}z^2dz$$

$z=\operatorname{sen}\theta \ \Rightarrow\ dz=\cos\theta\, d\theta$



para $z=0 \Rightarrow \theta=0$; $z=1 \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}$

$$S=12a^2\int_0^1 (1-z^2)^{\frac{3}{2}}z^2dz=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\operatorname{sen}^2 z)^{\frac{3}{2}}(\operatorname{sen} z.\cos z\,dz)$$

$$S=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 z.\operatorname{sen}^2 z\,dz=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\cos^2\theta}{4})(\frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta$$

$$S=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}^2 2\theta+\operatorname{sen}^2 2\theta.\cos 2\theta)d\theta$$

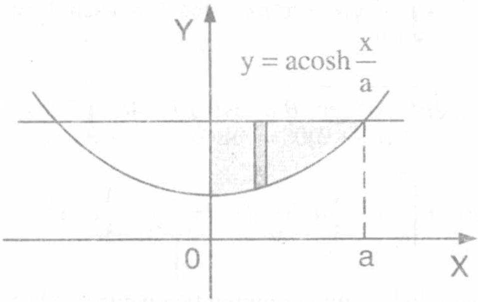
$$S=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1-\cos 4\theta}{2}+\text{sen}^2 2\theta.\cos 2\theta]d\theta$$

$$S=\frac{3}{2}a^2[\frac{\theta}{2}-\frac{\text{sen}\,2\theta\cos 2\theta}{4}-\frac{\text{sen}^3 2\theta}{6}]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a^2(\frac{\pi}{4}-0)=\frac{3a^2\pi}{8}u^2$$

1641 Hallar el área de la figura comprendida entre la catenaria $y=a\cosh(\frac{x}{a})$, el eje OY y la recta $y=\frac{a}{2e}(e^2+1)$.

Desarrollo

El grafico de $y=a\cosh(\frac{x}{a})$ es:



$$S=\int_0^a(\frac{a}{2e}(e^2+1)-a.\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2})dx=\frac{a}{2}\int_0^a(\frac{e^2+1}{e}+e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})dx$$

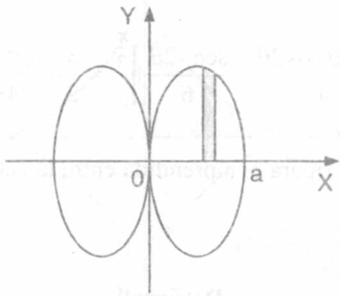
$$S=\frac{a}{2}[\frac{e^2+1}{e}x-ae^{\frac{x}{a}}+ae^{-\frac{x}{a}}]\Big|_0^a=\frac{a}{2}[\frac{e^2+1}{2}a-ae+ae^{-1}+a-a]$$

$$S=\frac{a}{2}[\frac{e^2+1}{e}-e+\frac{1}{e}]=\frac{a^2}{2}[\frac{e^2+1}{e}-e+\frac{1}{e}]=\frac{a^2}{2}[e+\frac{1}{e}-e+\frac{1}{e}]=\frac{2a^2}{2e}=a^2e^{-1}$$

Por tanto: $S=2a^2e^{-1}\ u^2$

1642 Hallar el área de la figura limitada por la curva $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$

Desarrollo



Como la figura es simétrica $y = \pm\frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

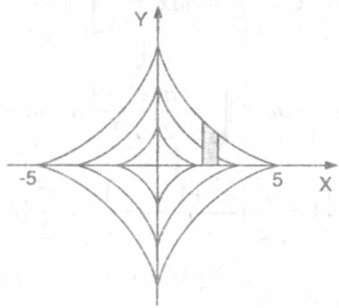
$$S = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx\text{. Sea } x = a\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\,d\theta$$

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\,\theta\sqrt{a^2 - a^2\,\text{sen}^2\,\theta}\;a\cos\theta\,d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{4}{3}a^2\cos^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{3}a^2(0-1) \Rightarrow S = \frac{4}{3}a^2u^2$$

1643 Calcular el área de la figura comprendida dentro de la curva $(\frac{x}{5})^2 + (\frac{y}{4})^{\frac{2}{3}} = 1$

Desarrollo



Como la curva es simétrica, se tiene: $y=\frac{4}{125}(25-x^2)^{\frac{3}{2}}$ luego:

$$S=4\int_0^5 \frac{4}{125}(25-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{16}{125}\int_0^5 (25-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

Sea $x = 5\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = 5\cos\theta\, d\theta$

Para $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$; $x = 5 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

$$S=\frac{16}{125}\int_0^5 (25-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{16}{125}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(25-25\operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}5\cos\theta\, d\theta$$

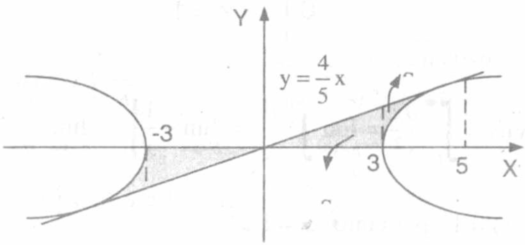
$$=80\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta)16x^5=80\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos 2\theta}{2})^2 d\theta$$

$$=20\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta=20(\theta+\operatorname{sen}2\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}4\theta}{8})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=20(\frac{3\theta}{2}+\operatorname{sen}2\theta+\frac{\operatorname{sen}4\theta}{8})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=20(\frac{3\pi}{4}-0)=15\pi \quad \text{por lo tanto:} \quad S=15\pi\ u^2$$

1644 Hallar el área de la figura comprendida entre la hipérbola equilátero $x^2-y^2=9$, el eje OX y el diámetro que pasa por le punto (5,4).

Desarrollo



$m = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{4}{5}x$; la intersección es: $x^2 - \frac{16}{25}x^2 = 9 \Rightarrow 9x^2 = 225 \Rightarrow$ x=± 5

como la curva es simétrica se tiene:

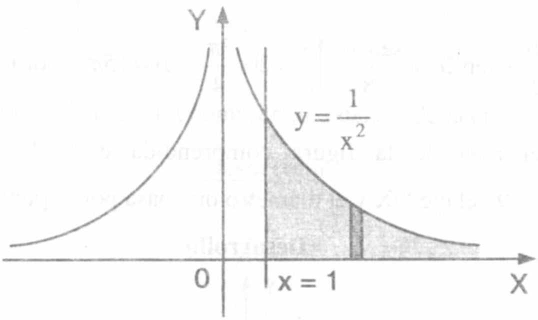
$$S = 2(S_1 + S_2) = 2[\int_0^3 \frac{4}{5}x\,dx + \int_3^5 \frac{4}{5}x - \sqrt{x^2-9})dx]$$

$$S = 2(\frac{2x^2}{5}\Big|_0^3 + \frac{2x^2}{5}\Big|_3^5 - [\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln[x+\sqrt{x^2-9}]]\Big|_3^5)$$

$$S = 2[(\frac{18}{5} + 10 - \frac{18}{5}) - (10 - \frac{9}{2}\ln 9) - \frac{9}{2}\ln 3] \text{ . Por tanto: } S = 9\ln 3\ u^2$$

1645 Hallar el área de la figura comprendida entre la curva $y = \frac{1}{2}$, el eje OX y la recta x = 1, (x ≥ 1)

Desarrollo

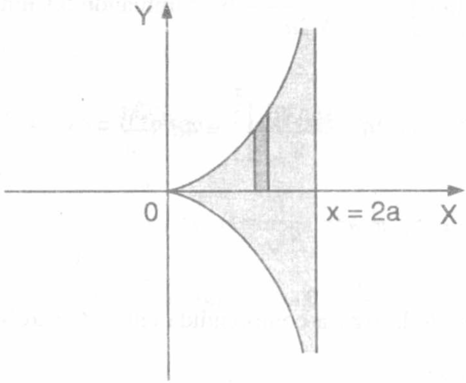


$$S = \int_1^{\infty} y\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\frac{1}{b} - 1)$$

S = -(0 – 1) = 1 por tanto $S = 1\ u^2$

1646 Hallar el área de la figura limitada por la cisoide $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ y su asíntota x =2a, (a > 0).

Desarrollo



Por la simetría se tiene:

$$S = 2\int_0^{2a} y\,dx = 2\int_0^{2a}\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}dx = 2\int_0^{2a} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2a-\varepsilon} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$$

Hallamos la integral $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$. Sea $x = z^2 \Rightarrow$ dx = 2z dz

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = \int \frac{z^2.z.2z\,dz}{\sqrt{2a-z^2}} = 2\int \frac{z^4 dz}{\sqrt{2a-z^2}}$$

Sea $z = \sqrt{2a}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dz = \sqrt{2a}\cos\theta\, d\theta$

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = 2\int \frac{z^4 dz}{\sqrt{2a-z^2}} = 2\int \frac{4a^2\operatorname{sen}^4\theta.\sqrt{2a}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{2a}\cos\theta}$$

$$= 8a^2\int \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = 8a^2\int \frac{(1-\cos 2\theta)^2}{4}d\theta$$

$$= 2a^2 \int (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)d\theta = 2a^2(\frac{3\theta}{2} - \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{8})$$

como $S = 2\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2a^2-\varepsilon} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$ cambiando los limites se tiene:

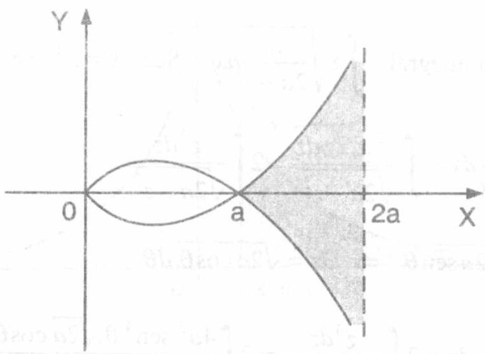
$$S = 2.2a^2(\frac{3\theta}{2} - \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{8})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2(\frac{3\pi}{4} - 0) = 3a^2\pi$$

por tanto: $S = 3a^2\pi\ u^2$

1647 Hallar el área de la figura comprendida entre la estrofoide $y^2 = \dfrac{x(x-a)^2}{2a-x}$, y su asíntota $a \geq 0$.

<u>**Desarrollo**</u>

La grafica de la estrofoide $y^2 = \dfrac{x(x-a)^2}{2a-x}$ es:



$y = (x-a)\dfrac{x}{\sqrt{2a-x}}$; $A = 2\displaystyle\int_a^{2a} (x-a)\frac{x}{\sqrt{2a-x}}dx$

sea $x = z^2 \Rightarrow$ dx = 2z dz, para x = a, $z = \sqrt{a}$; x = 2a $\Rightarrow$ $z = \sqrt{2a}$

$$A = 2\int_{a}^{2a}(x-a)\frac{x}{\sqrt{2a-x}}dx = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}}(z^2-a)\frac{z}{\sqrt{2a-z^2}}2z\,dz$$

$$A = 4\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}}\frac{(z^2-a)z^2dz}{\sqrt{2a-z^2}} \qquad \textbf{... (1)}$$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{z}{\sqrt{2a}} \Rightarrow z = \sqrt{2a}\operatorname{sen}\theta$ derivando se tiene: $dz = \sqrt{2a}\cos\theta\,d\theta$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{z}{\sqrt{2a-z^2}} \;;\; \begin{cases} z = \sqrt{a},\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \\ z = \sqrt{2a},\ \operatorname{sen}\theta = 1,\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$A = 4\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}}(z^2-a).z.\frac{z\,dz}{\sqrt{2a-z^2}} = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2a\operatorname{sen}^2\theta - a)\sqrt{2a}\operatorname{sen}\theta.\operatorname{tg}\theta.\sqrt{2a}\cos\theta\,d\theta$$

$$A = 8a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2\operatorname{sen}^2\theta - a)\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = 8a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta - 1)\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

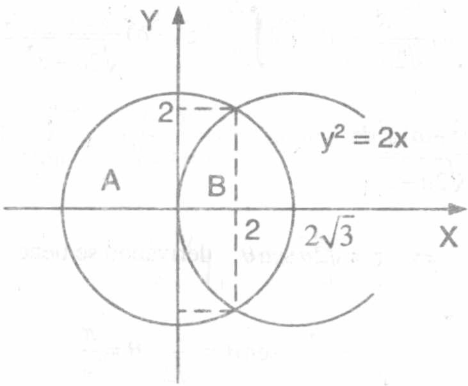
$$A = 4a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos 2\theta(1-\cos 2\theta)d\theta = 4a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\cos 4\theta}{2} - \cos 2\theta)d\theta$$

$$A = 4a^2(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}4\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2[(\frac{\pi}{4}-0) - (\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2})]$$

$$A = a^2(\frac{\pi}{2}+2)u^2$$

1648 Calcular el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = 2x$ divide el circulo $x^2 + y^2 = 8$.

Desarrollo



Buscaremos los puntos de intersección $x^2 + y^2 = 8$

$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 4$ o $x = 2$

Luego $x = -4$ no se toma en cuenta, por tanto los puntos de intersección es: (2,2), (2,-2), por la simetría se tiene:

$$B = 2[\int_0^2 y\,dx + \int_2^{2\sqrt{2}} y\,dx] = 2[\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_2^{\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\,dx$$

$$B = 2[\frac{\sqrt{2}.2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^2 + (\frac{x}{2}\sqrt{8 - x^2} + 4\operatorname{arcsen}\frac{x}{2\sqrt{2}})\Big|_2^{2\sqrt{2}}]$$

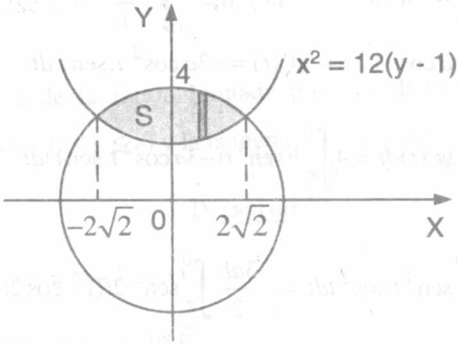
$$B = 2[\frac{8}{3} + 4\operatorname{arcsen}(1) - (2 + 4\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{2}})] = 2[\frac{2}{3} + 2\pi - \pi] = (2\pi + \frac{4}{3})u^2$$

para la parte A se tiene: $A = \pi r^2 - B = 8\pi - (2\pi + \frac{4}{3}) = (8\pi - 2\pi - \frac{4}{3})u^2$

Por tanto: $A = (6\pi - \frac{4}{3})u^2$

1649 Calcular el área de la superficie comprendida entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y la parábola $x^2 = 12(y-1)$.

Desarrollo



Buscaremos los puntos de intersección:

$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 16 - y^2 \Rightarrow x^2 = 12(y-1)$$

$$\Rightarrow 16 - y^2 = 12y - 12 \Rightarrow y^2 + 12y - 28 = 0$$

de donde $y = 2 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$; por la simetría se tiene:

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{3}} [\sqrt{16-x^2} - \frac{x^2}{12} - 1]dx = 2[\frac{x}{9}\sqrt{16-x^2} + 8arcsen\frac{x}{4} - \frac{x^3}{36} - x]\Big|_0^{2\sqrt{3}}$$

$$S = 2[2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{3}] = \frac{16\pi}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3} = (\frac{16}{3}\pi - \frac{4}{3}\sqrt{3})u^2$$

para la parte A se tiene: $A = \pi r^2 - s = 16\pi - (\frac{16}{3}\pi - \frac{4}{3}\sqrt{3}) = (\frac{32}{3}\pi + \frac{4}{3}\sqrt{3})u^2$

1650 Hallar el área contenida en el interior de la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = b\,\text{sen}^3 t$.

Desarrollo

$$\psi(t)=a\cos^3 t \Rightarrow \text{ para } x=0 \Rightarrow t_1=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x=a \Rightarrow t_2=0 \Rightarrow \psi(t)=b\,\text{sen}^3 t$$

como $\psi(t)=a\cos^3 t \Rightarrow \psi'(t)=-3a\cos^2 t.\text{sen}\,t\,dt$

$$S=4\int_{t_1}^{t_2}\psi(t).\psi'(t)dt=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\,\text{sen}^3 t(-3a\cos^2 t.\text{sen}\,t)dt$$

$$S=-12ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\text{sen}^4 t\cos^2 t dt=-\frac{3ab}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\text{sen}^2 2t(1-\cos 2t)dt$$

$$S=-\frac{3ab}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{1}(\frac{1-\cos 4t}{2}-\text{sen}^2 2t.\cos 2t)dt=-\frac{3ab}{2}[\frac{t}{2}-\frac{sen4t}{8}-\frac{sen^3 2t}{6}]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$S=-\frac{3ab}{2}[0-\frac{\pi}{4}]=\frac{3ab\pi}{8} \quad \text{por tanto:} \quad S=\frac{3ab\pi}{8}u^2$$

651 Hallar el área de la superficie comprendida entre el eje OX y el arco de la cicloide: $x=a(t-\text{sen } t)$; $y=a(1-\cos t)$.

Desarrollo

Para $x=0 \Rightarrow t_1=0$; $x=2\pi a \Rightarrow t_2=2\pi$

Como: $\psi(t)=a(1-\cos t)$

$\psi(t)=a(t-\text{sen } t) \Rightarrow \psi'(t)=(a-a\cos t)dt$

$$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)(a-a\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt$$

$$S = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 (t - 2\,\text{sen}\, t + \frac{t}{2} + \frac{\text{sen}\, 2t}{4})\Big|_0^{2\pi}$$

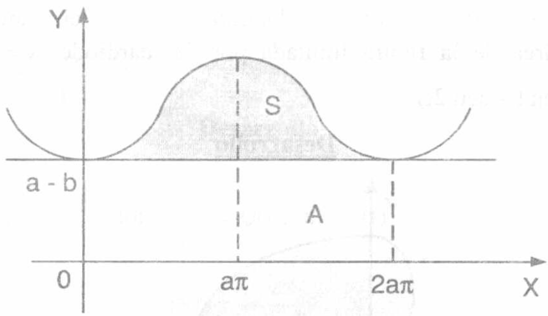
$$S = a^2 (\frac{3t}{2} - 2\,\text{sen}\, t + \frac{\text{sen}\, 2t}{4})\Big|_0^{2\pi} = a^2(3\pi - 0) = 3a^2\pi \text{ . Por tanto: } S = 3a^2\pi\ u^2$$

1652 Hallar el área de la figura limitada por una de la trocoide x = at – b sen t; y = a – b cos t, $(0 \le b \le a)$ y la tangente a la misma en sus puntos inferiores.

Desarrollo

Como $x = \varphi(t) = at - b\,\text{sen}\, t$

$x = \psi(t) = a - b \cos t$



$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\psi'(t)dt - A \text{ ; hallaremos: } t_1 \text{ y } t_2$$

$$0 = \psi(t_1) = at_1 - b\,\text{sen}\, t_1 \Rightarrow 0 = at_1 - b\,\text{sen}\, t_1$$

$$2a\pi = \varphi(t_2) = at_2 - b\,\text{sen}\, t_2 \Rightarrow 2a\pi = at_2 - b\,\text{sen}\, t_2$$

como la tangente en los puntos inferiores es paralela al eje X $\Rightarrow$ $y' = 0$, es decir:

$y' = \psi'(t) = -b\operatorname{sen} t = 0 \ \Rightarrow \ t_1 = 0$ en x = 0

$y' = \psi'(t) = -b\operatorname{sen} t = 0 \ \Rightarrow \ t_2 = 2\pi$ en x = 2πa. Luego:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt - A = \int_0^{2\pi} (a - b\cos t)(a - b\cos t)dt - (a-b)2\pi$$

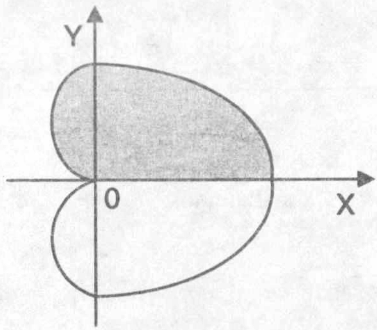
$$S = \int_0^{2\pi} (a^2 - 2ab\cos t + b^2\cos^2 t)dt - 2a^2\pi + 2ab\pi$$

$$S = (a^2 t - 2ab\operatorname{sen} t + \frac{b^2 t}{2} + \frac{b^2 \operatorname{sen} 2t}{4})\Big|_0^{2\pi} - 2a^2 + 2ab\pi$$

$S = 2a^2\pi + b^2\pi - 2a^2\pi + 2ab\pi$ por tanto: $S = \pi(b^2 + 2ab)u^2$

1653 Hallar el área de la figura limitada por la cardiode x = a(2 cos t – cos 2t); y = a (2 sen t – sen 2t)

Desarrollo



$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\psi'(t)dt$ donde ψ(t) = a (2 sen t – sen 2t)

ψ(t) = a (2 cost – cos 2t) ; $\psi'(t) = a(2\operatorname{sen} 2t - 2\operatorname{sen} t)$

$$S = 2\int_{\pi}^{0} a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)a(2\operatorname{sen} 2t - 2\operatorname{sen} t)dt$$

$$S = 2a^2\int_{\pi}^{0} (2\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen} t\cos t)(4\operatorname{sen} t\cos t - 2\operatorname{sen} t)dt$$

$$S = 8a^2\int_{\pi}^{0} (\operatorname{sen} t - \cos t\operatorname{sen} t)(2\operatorname{sen} t\cos t - \operatorname{sen} t)dt$$

$$S = 8a^2\int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2 t(1-\cos t)(2\cos t - 1)dt = -8a^2\int_{\pi}^{0} sen^2 t(1-3\cos t + 2\cos^2 t)dt$$

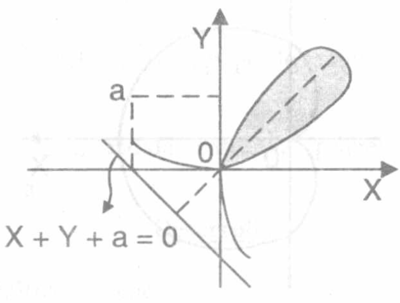
$$S = -8a^2\left(\frac{3t}{4} - \frac{\operatorname{sen} t\cos t}{2} - \operatorname{sen}^3 t - \frac{\operatorname{sen} 2t\cos 2t}{8}\right)\Big/_{\pi}^{0} = -8a^2\left(0 - \frac{3\pi}{4}\right) = 6a^2\pi\, u^2$$

1654 Hallar el área de la figura limitada por el lazo del folium de descartes $x = \frac{3at}{1+t^3}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$

Desarrollo

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt\,,\ \text{donde}\quad y = \psi(t),\ x = \varphi(t)$$

siendo $\psi(t) = \dfrac{3at^2}{(1+t^3)}$ y $\varphi(t) = \dfrac{3at}{(1+t^3)}$



Como: $\varphi(t)=\dfrac{3at}{1+t^3} \Rightarrow \varphi'(t)=\dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$

$$S=\int_0^{\infty}\frac{3at^2.3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt=9a^2\int_0^{\infty}\frac{t^2-2t^5}{(1+t^3)^3}dt$$

$$S=9a^2[\int_0^{\infty}\frac{3t^2}{(1+t^3)^2}dt-2\int_0^{\infty}\frac{t^5+t^2}{(t^3+1)^3}dt]$$

$$S=9a^2[-\frac{1}{2(1+t^3)^2}+\frac{2}{3(1+t^3)}]\Big/_0^{\infty}=9a^2[0-[-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}]]$$

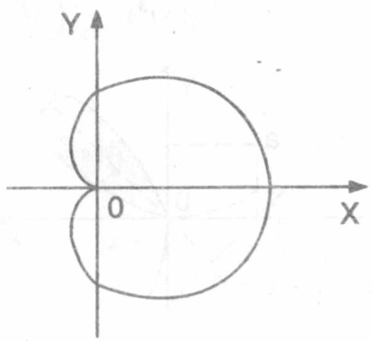
$S=9a^2(\dfrac{1}{6})=\dfrac{3a^2}{2}$ por lo tanto: $S=\dfrac{3a^2}{2}u^2$

1655 Hallar el área de la figura limitada por la cardioide $r=\theta\,(1+\cos\psi)$

Desarrollo

Se conoce que: $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\psi$, donde $r=f(\psi)$

El gráfico de $r=\theta\,(1+\cos\psi)$ es:



$$S = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\psi = \int_0^{\pi} [a(1+\cos\psi)]^2 d\psi$$

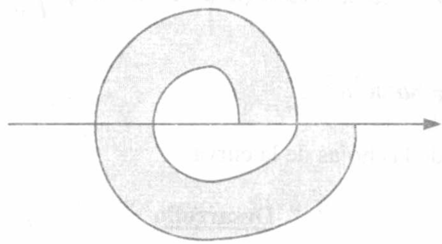
$$S = a^2 \int_0^{\pi} (1+2\cos\psi+\cos^2\psi)d\psi = a^2(\frac{3\psi}{2}+2\operatorname{sen}\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4})\Big/_0^{\pi}$$

por tanto: $S = \frac{3a^2\pi}{2}u^2$

1656 Hallar el área comprendida entre la primera y segunda espiral de Arquímedes: $r = a\psi$

Desarrollo

De acuerdo al gráfico se tiene:



$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r_2^2 - r_1^2)d\psi \text{ , donde } r_1 = a\psi \text{ ; } r_2 = (\psi + 2\pi)$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ([a(\psi+2\pi)]^2 - a^2\psi^2]d\psi \text{ por lo tanto: } S = 8a^2\pi^3 u^2$$

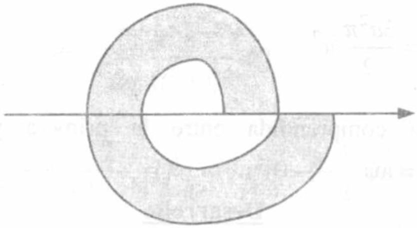
1656 Hallar el área comprendida entre la primera y segunda espiral de Arquímedes: $r = a\psi$

Desarrollo

De acuerdo al gráfico se tiene:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(r_2^2-r_1^2)d\psi\ ,\ \text{donde}\ \ r_1=a\psi\ ;\ \ r_2=(\psi+2\pi)$$

por tanto: $S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}([a(\psi+2\pi)]^2-a^2\psi^2)d\psi$



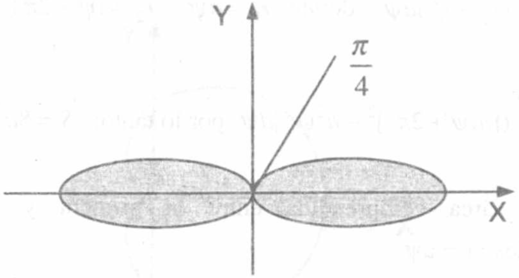
$$S=\int_0^{2\pi}(2a^2\psi\pi+2a^2\pi^2)d\psi=(a^2\psi^2\pi+2a^2\pi^2\psi)\Big/_0^{2\pi}$$

por tanto: $S=8a^2\pi^3u^2$

1657 Hallar el área de las hojas de la curva.

Desarrollo

De acuerdo al gráfico se tiene:

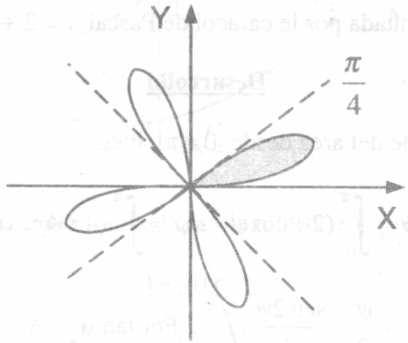


$$S=2.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2d\psi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos^2 2\psi d\psi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\psi)d\psi$$

$$=\frac{a^2}{2}(\psi+\frac{\operatorname{sen}4\psi}{4})\Big/_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2\pi}{8}u^2$$

1658 Hallar el área limitada por la curva $r^2=a^2\operatorname{sen}4\psi$

Desarrollo

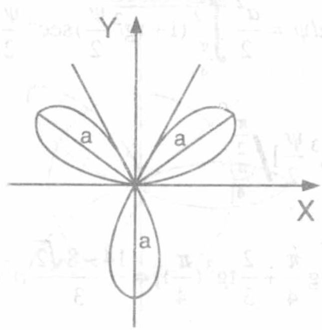


$$S=4.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2d\psi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\operatorname{sen}4\psi d\psi=-2a^2.\frac{\cos 4\psi}{4}\Big/_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-2a^2(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4})=a^2 \text{ por tanto: } S=a^2u^2$$

1659 Hallar el área limitada por la curva r = a sen 3ψ

Desarrollo



$$S=\frac{1}{2}.3\int_0^{\frac{\pi}{3}}r^2d\psi=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}a^2\operatorname{sen}^2 3\psi\,d\psi=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1-\cos 6\psi}{2})d\psi$$

$$=\frac{3a^2}{4}(\psi-\frac{\operatorname{sen}6\psi}{6})\Big/_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3a^2}{4}(\frac{\pi}{3}-0)\text{ . Por tanto: }\quad S=\frac{a^2\pi}{4}u^2$$

1660 Hallar el área limitada por le caracol de Pascal $r = 2 + \cos\psi$

Desarrollo

El área es el doble del área desde 0 a π, luego

$$S=2.\frac{1}{2}\int_0^{\pi}r^2d\psi=\int_0^{\pi}(2+\cos\psi)^2d\psi=\int_0^{\pi}(4+4\cos\psi+\cos^2\psi)d\psi$$

$$=(4\psi+4\operatorname{sen}\psi+\frac{\psi}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\psi}{4})\Big/_0^{\pi}\text{ . Por tanto: }\quad S=\frac{9}{2}\pi u^2$$

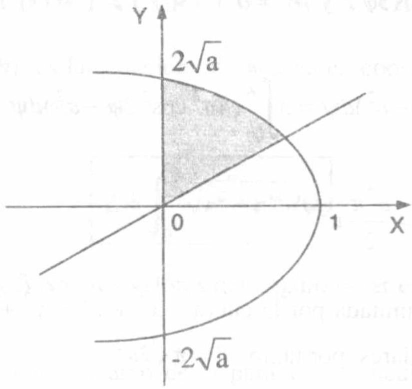
1661 Hallar el área limitada por la parábola $r=a\sec^2\frac{\psi}{2}$ y las semirectas $\psi=\frac{\pi}{4}$ y $\psi=\frac{\pi}{2}$; $S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}r^2d\psi$

Desarrollo

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\operatorname{sen}^4\frac{\psi}{2}d\psi=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2})\sec^2\frac{\psi}{2}d\psi$$

$$S=\frac{a^2}{2}[2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\psi}{2}]\Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$S=\frac{a^2}{2}[(2+\frac{2}{3})-(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3(\frac{\pi}{4})]=\frac{14-8\sqrt{2}}{3}a^2u^2$$



1662 Hallar el área e la figura limitada por la elipse $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\psi}$, $(0 \le \varepsilon < 1)$

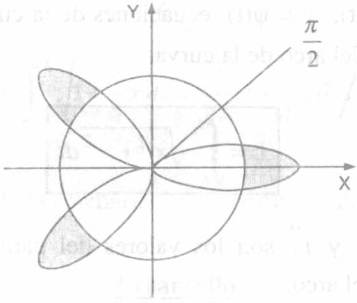
Desarrollo

$$S = 4.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\psi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^2}{(1+\varepsilon\cos\psi)^2} d\psi$$

$$S = 2p^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{(1+\varepsilon\cos\psi)^2} \quad \text{integrando se tiene:} \quad S = \frac{\pi\, p^2}{(1+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} u^2$$

1663 Hallar el área de la figura limitada por la curva r = 2a cos 3ψ que esta fuera del circulo r = a

Desarrollo



Sean $r_1 = 2a\cos 3\psi$ y $r_2 = a$

$$S = 6.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(r_1^2 - r_2^2)d\psi = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}}(4a^2\cos^2 3\psi - a^2)d\psi$$

por lo tanto $S = \dfrac{a^2\pi}{2}u^2$

1664 Hallar el área limitada por la curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$. Sugerencia: pasar a coordenadas polares; por tanto $S = \pi\sqrt{2}u^2$

6.2. LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA.-

(1) LONGITUD DEL ARCO EN COORDENADAS RECTANGULARES

Consideremos y = f(x) una curva, la longitud L del arco de la curva comprendida entre dos puntos x = a; x = b es:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx}$$

(2) LONGITUD DEL ARCO DE UNA CURVA DADA EN FORMA PARAMETRICA.-

Sea x = ψ(t), y = ψ(t) ecuaciones de la curva en forma paramétrica, la longitud L del arco de la curva:

$$\boxed{L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt}$$

donde t_1 y t_2 son los valores del parámetro correspondiente a los extremos del arco.

③ LONGITUD DE LA CURVA DADA EN FORMA POLAR.-

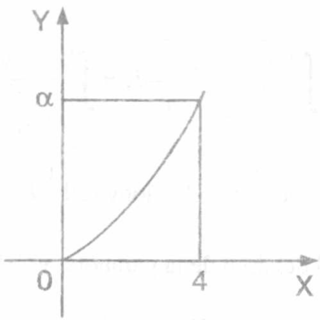
Si $r = \psi(\theta)$ es la ecuación de la curva en coordenadas polares r y ψ, la longitud L del arco es:

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\psi}$$

donde α y β son los valores del ángulo polar en los puntos extremos del arco.

1665 Calcular la longitud del arco de la parábola semicubica $y^2 = x^3$, desde el origen de coordenadas hasta el punto, cuyas coordenadas son x = 4; y = 8.

Desarrollo



$y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y'^2 = \frac{9}{4}x$. Longitud del arco:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{8}{27}(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}} \Big/_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

1666 Hallar la longitud de la catenaria $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ desde el vértice A(0,a) hasta el punto B(b,h).

Desarrollo

$y = a\cosh(\frac{x}{a}) = a(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2})$ de donde $e^{\frac{2x}{a}} - \frac{2y}{a}e^{\frac{x}{a}} + 1 = 0$, despejando

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{\frac{2y}{a} \pm \sqrt{\frac{4y^2}{a^2} - 4}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

$$\frac{x}{a} = \ln(\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}) \Rightarrow x = a\ln(\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a})$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}} \Rightarrow (\frac{dx}{dy})^2 = \frac{a^2}{y^2 - a^2}$$

$$\int_a^h \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}\,dy = \int_a^h \sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2 - a^2}}\,dy = \int_a^h \frac{y}{\sqrt{y^2 - a^2}}\,dy = \sqrt{y^2 - a^2}\ \Big/_a^h$$

$$= \sqrt{h^2 - a^2} - 0 \quad \text{longitud} \quad L = \sqrt{h^2 - a^2}$$

1667 Calcular la longitud del arco de la parábola $y = 2\sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Desarrollo

$$y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'^2 = \frac{1}{x}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx$$

calculando $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx$, se tiene $z^2 = x + 1$

dz = 2z dz ; $x = z^2 - 1$ y $z = \sqrt{x+1}$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{z.2z\,dz}{\sqrt{z^2-1}} = 2\int \frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-1}} \qquad \text{... (1)}$$

$z = \sec\theta \Rightarrow dz = \sec\theta \,\mathrm{tg}\,\theta\, d\theta$

$$\int \frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-1}} = \int \frac{\sec^2\theta.\sec\theta.\mathrm{tg}\theta\, d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}} = \int \sec^3\theta\, d\theta\,, \text{ integrando por partes}$$

$$\int \frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-1}} = \int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}[\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\theta| + \mathrm{tg}\theta.\sec\theta]$$

$$\int \frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{2}[\ln|z+\sqrt{z^2-1}| + z\sqrt{z^2-1}] \qquad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-1}} = \ln|z+\sqrt{z^2-1}| + z\sqrt{z^2-1}$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dx = \ln|\sqrt{x+1}+\sqrt{x}| + \sqrt{x}.\sqrt{x+1} \Big/_0^1$$

$$L = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dx = (\ln|\sqrt{x+1}+\sqrt{x}| + \sqrt{x}.\sqrt{x+1}) \Big/_0^1$$

Por lo tanto $L = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$

1668 Calcular la longitud del arco de la curva $y = e^x$, comprendido entre los puntos (0,1) y (1,e).

Desarrollo

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'^2 = e^{2x}$$

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}x=\int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}dx \quad \text{calculamos} \quad \int \sqrt{1+e^{2x}}dx$$

para esto $z^2=1+e^{2x} \Rightarrow z\,dz=e^{2x}dx$

pero $1+e^{2x}=z^2 \Rightarrow e^{2x}=z^2-1$

Luego $z\,dz=e^{2x}dx=(z^2-1)dx$ de donde $dx=\dfrac{z\,dz}{z^2-1}$

$$\int \sqrt{1+e^{2x}}dx=\int z.\frac{z\,dz}{z^2-1}=\int \frac{z^2dz}{z^2-1}=\int (1+\frac{1}{z^2-1})dz=z+\frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1}$$

$$=\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{e^{2x}+1}-1}{\sqrt{e^{2x}+1}+1}=\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{e^{2x}+1}-1)^2}{e^{2x}}$$

$$=\sqrt{1+e^{2x}}+\ln(\frac{\sqrt{e^{2x}+1}-1}{e^x})$$

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}dx=[\sqrt{1+e^{2x}}+\ln\frac{\sqrt{e^{2x}+1}-1}{e^x}]\Big/_0^1$$

$$L=\sqrt{1+e^2}+\ln\frac{\sqrt{e^2+1}-1}{e}-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)$$

$$L=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{e^2+1}-1)(\sqrt{2}+1)}{e}$$

NOTA: $\ln\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}=\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=-\ln(\sqrt{2}+1)$

1669 Hallar la longitud del arco de al cuya $y=\ln x$ desde $x=\sqrt{3}$ hasta $x=\sqrt{8}$

Desarrollo

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y'^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$$

ahora calcularemos $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$

para esto $x = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + 1}}{\operatorname{tg}\theta} \sec^2\theta\, d\theta = \int \sec^3\theta . \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int (\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{tg}\theta . \sec\theta)\, d\theta = \ln|\operatorname{cosec}\theta - \operatorname{ctg}\theta| + \sec\theta$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right| + \sqrt{1+x^2} = \ln\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} + \sqrt{1+x^2}$$

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx = \left[\ln\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} + \sqrt{1+x^2}\,\right] \Big/_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}$$

$$L = (\ln\frac{2}{\sqrt{8}} + 3) - (\ln\frac{1}{\sqrt{3}} + 2) = \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \ln\sqrt{3}$$

$$= \ln\sqrt{2} + \ln\sqrt{3} + 1 = \ln(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) + 1 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

1670 Hallar la longitud del arco $y = \operatorname{arcsen} e^{-x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Desarrollo

$$y = \text{arcsen}\, e^{-x} \Rightarrow y' = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \Rightarrow y'^2 = \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \ln|e^x + \sqrt{e^{2x}-1}|\Big/_0^1 = \ln(e+\sqrt{e^2-1}) - \ln(1+0) = \ln(e+\sqrt{e^2-1})$$

1671 Calcular la longitud del arco de la curva x = ln sec y, comprendido entre y = 0 a $y = \frac{\pi}{3}$

Desarrollo

$$x = \ln \sec y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\sec y \operatorname{tg} y}{\sec y} = \operatorname{tg} y$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec y\,dy$$

$$= \ln(\sec y + \operatorname{tg} y)\Big/_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(2+\sqrt{3}) - \ln 1 = \ln(2+\sqrt{3})$$

1672 Hallar la longitud del arco de la curva $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ desde y = 1 hasta y = e

Desarrollo

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y} \;;\; \frac{dx}{dy} = \frac{y^2-1}{2y}$$

$$L = \int_1^e \sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy = \int_1^e \sqrt{1+(\frac{y^2-1}{2y})^2}\,dy = \int_1^e \sqrt{\frac{4y^2+y^4-2y^2+1}{(2y)^2}}\,dy$$

$$L = \int_1^e \frac{y^2+1}{2y}dy = (\frac{y^2}{4} + \frac{1}{2}\ln y)\Big/_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

1673 Hallar la longitud del arco de la curva derecha de tractriz $x = -\sqrt{a^2-y^2} + a\ln|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}|$ desde $y = a$ hasta $y = b$ $(0 < b < a)$

Desarrollo

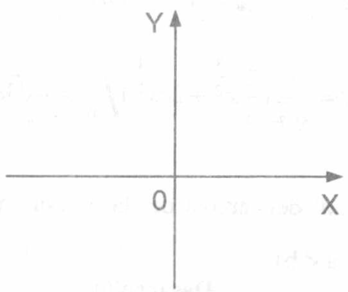
$$x = -\sqrt{a^2-y^2} + a\ln|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}|$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} - \frac{a^2}{y\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{y^2-a^2}{y\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{(a^2-y^2)}{y\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} \quad \Rightarrow \quad (\frac{dx}{dy})^2 = \frac{a^2-y^2}{y^2}$$

$$L = \int_b^a \sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy = \int_b^a \sqrt{1+\frac{a^2-y^2}{y^2}}\,dy = \int_b^a \frac{a\,dy}{y}$$

$$= a\ln y\Big/_b^a = a\ln a - a\ln b = a\ln(\frac{a}{b})$$

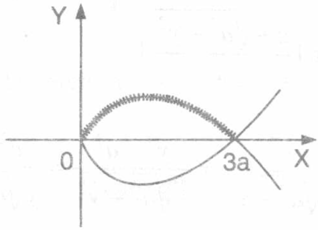


1674 Hallar la longitud de la parte cerrada de la curva $9ay^2 = x(x-3a)^2$.

Desarrollo

$$9ay^2 = x(x-3a)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x-3a)^2 + 2x(x-3a)$$

$$18ay\frac{dy}{dx} = 3(x-3a)(x-a)\ ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x-3a)(x-a)}{6ay}$$



Como $\quad 9ay^2 = x(x-3a)^2 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{(x-3a)\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}$

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x-a)\sqrt{a}}{2a\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad (\dfrac{dy}{dx})^2 = \dfrac{(x-a)^2}{4ax}$

Como la curva es simétrica respecto al eje y, se tiene:

$$L = 2\int_0^{3a}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx = 2\int_0^{3a}\sqrt{1+\frac{(x-a)^2}{4ax}}\,dx = 2\int_0^{3a}\sqrt{\frac{(x+2)^2}{4ax}}\,dx$$

$$L = \int_0^{3a}\sqrt{\frac{x+2}{\sqrt{ax}}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2ax^{\frac{1}{2}})\Big/_0^{3a} = 4\sqrt{3a}$$

1675 Hallar la longitud del arco de la curva $y = \ln(c\,\mathrm{tgh}\dfrac{x}{a})$ desde x = a hasta x = b, (0 < a < b)

Desarrollo

$$y=\ln(c\,\text{tgh}\frac{x}{a}) \quad\Rightarrow\quad e^{y}=c\,\text{tgh}\frac{x}{a}=\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}$$

$$y=\ln\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}=\ln\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}.\frac{d}{dx}(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1})=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}.\frac{(-2e^{x})}{(e^{x}-1)^{2}} \qquad ...(*)$$

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^{2}}\,dx=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{2}}}\,dx$$

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-2e^{x}}{e^{2x}-1} \quad\Rightarrow\quad (\frac{dy}{dx})^{2}=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{2}}$$

(*) esta expresión sigue del asterisco.

$$L=\int_{a}^{b}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx=\int_{a}^{b}(1+\frac{2}{e^{2x}-1})dx=\int_{a}^{b}(1+\frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}})dx$$

$$=[x+\ln(1-e^{-2x})]\Big/_{a}^{b}=b-a+\ln(1-e^{-b})-\ln(1-e^{-2b})$$

$$=b-a+\ln\frac{1-e^{-2b}}{1-e^{-2a}}=b-a+\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}.\frac{e^{2a}}{e^{2b}}=b-a+\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+\ln\frac{e^{2a}}{e^{2b}}$$

$$=b-a+\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+\ln e^{2a}-\ln e^{2b}=a-b+\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}$$

1676 Hallar la longitud del arco de la evolvente del circulo $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$; $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$ desde $t = 0$ hasta $t = T$.

Desarrollo

$$x = a(\cos t + t\,\text{sen}\,t) \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = at\cos t$$

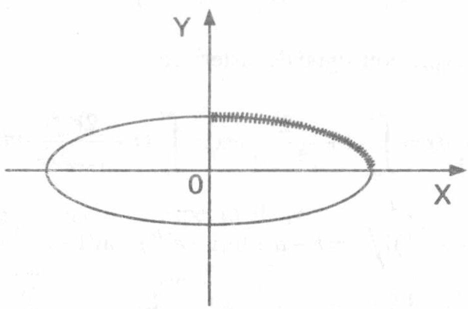
$$y = a(\text{sen}\,t - t\cos t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = at\,\text{sen}\,t$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\,dt = \int_0^T \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2 sen^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^T at\;dt = \frac{at^2}{2}\Big/_0^T = \frac{aT^2}{2}$$

1677 Hallar la longitud de la evolvente de la elipse $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t$; $y = \dfrac{c^2}{b} sen^3 t$, $(c^2 = a^2 - b^2)$

Desarrollo



$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{3c^2}{a}\cos^2 t.sent$$

$$y = \frac{c^2}{b}\,sen^3 t \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3c^2}{b}\,sen^2 t\cos t$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\,dt$$

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{9c^2}{a^2}c^4tsen^2t+\frac{9c^2}{b^2}sen^4t\cos^2 t\,dt}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3c^2sent\cos t\sqrt{\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{sen^2t}{b^2}}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3c^2sent\cos t\sqrt{\frac{1-sen^2t}{a^2}+\frac{sen^2t}{b^2}}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3c^2sent\cos t\sqrt{\frac{b^2+(a^2-b^2)sen^2t}{a^2b^2}}dt=\frac{6c^2}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2sent\cos t\sqrt{b^2+c^2sen^2t}\,dt$$

$$=\frac{6}{abc}.\frac{(b^2+c^2sen^2t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{abc}(b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{abc}b^3$$

$$=\frac{4}{abc}(a^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{abc}b^3=\frac{4a^2}{bc}-\frac{4b^2}{ac}=4\frac{ac^3-b^3c}{abc}=4\frac{(a^3-b^3)}{ab}$$

1678 Hallar la longitud de la curva $x = a(2\cos t - \cos 2t)$; $y = a(2\,sen\,t - sen\,2t)$.

Desarrollo

$x = a(2\cos t - \cos 2t) \Rightarrow x'=a(2sen2t-2\cos t) \Rightarrow x'=2a(sen2t-sent)$

$y = a(2\,sen\,t - sen\,2t) \Rightarrow y'=2a(\cos t-\cos 2t)$

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2(sen2t-sent)^2+4a^2(\cos t-\cos 2t)^2}\,dt$$

$$=4a\int_0^{\pi}\sqrt{sen^2 2t-2sent.sen2t+\cos^2 t-2\cos t\cos 2t+\cos^2 2t}\;dt$$

$$=4a\int_0^{\pi}\sqrt{2-4sen^2t\cos t-2\cos^3 t+2\cos t sen^2t}\;dt$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos t(sen^2 t+\cos^2 t)}dt = 4a\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt$$

$$= 4a\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt = 4\sqrt{2a}\int_0^{\pi}\sqrt{2}sen\frac{t}{2}dt = 8a\int_0^{\pi}sen\frac{t}{2}dt$$

$$= 8a(-2\cos\frac{t}{2})\Big/_0^{\pi} = -16a(\cos\pi - \cos 0) = -16a(0-1) = 16a$$

1679 Hallar la longitud de la primera espiral de la espiral de Arquimides $r = a\,\psi$.

Desarrollo

Si $r = a\,\psi \;\Rightarrow\; \dfrac{dr}{d\psi} = a$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\psi = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\psi^2+a^2}\,d\psi = a\int_0^{2\pi}\sqrt{\psi^2+1}\,d\psi$$

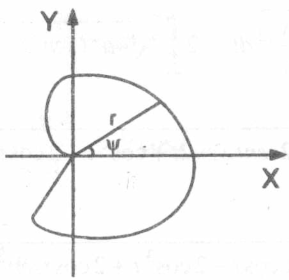
$$= [\frac{a\psi}{2}\sqrt{\psi^2+1}+\frac{a}{2}\ln|\psi+\sqrt{\psi^2+1}|]\Big/_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a}{2}(2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln|2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}|) \qquad \text{... (*)}$$

$$= a\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{a}{2}\ln|2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}|$$

1680 Hallar la longitud total de la cardioide $r = a\,(1+\cos\psi)$

Desarrollo



$$r = a\,(1 + \cos\psi) \Rightarrow \frac{dr}{d\psi} = -asen\psi$$

como la curva es simétrica con respecto al eje X, la longitud total de la cardioide es:

$$L = 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2 + r'^2}\,dr = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\psi)^2 + a^2sen^2\psi}\,d\psi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\psi}\,d\psi$$

$$L = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\psi}\,d\psi = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{2}\cos(\frac{\psi}{2})d\psi$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\psi}{2}d\psi = 4a.2sen(\frac{\psi}{2})\Big/_0^{\pi} = 8asen\frac{\pi}{2} - 8asen0 = 8a$$

1681 Hallar la longitud del arco de la parte de la parábola $r = a\sec^2(\frac{\psi}{2})$, cortada de la misma por la recta vertical que pasa por el polo.

<u>**Desarrollo**</u>

$$r = a\sec^2(\frac{\psi}{2}) \Rightarrow \frac{dr}{d\psi} = \frac{a}{2}\sec^2(\frac{\psi}{2})tg(\frac{\psi}{2})$$

$$L = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\psi})^2}\,d\psi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sec^4\frac{\psi}{2} + a^2\sec^4\frac{\psi}{2}.tg^2\frac{\psi}{2}}\,d\psi = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec^3\frac{\psi}{2}d\psi$$

$$= 2a[\ln|tg\frac{\psi}{2} + \sec\frac{\psi}{2}| + tg\frac{\psi}{2}\sec\frac{\psi}{2}]\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a[\ln|tg\frac{\pi}{4} + \sec\frac{\pi}{4}| + tg\frac{\pi}{4}.\sec\frac{\pi}{4}]$$

$$= 2a(\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2})$$

1682 Hallar la longitud del arco de la espiral hiperbólica $r\psi = 1$, desde el punto $(2,\frac{1}{2})$ hasta el punto $(\frac{1}{2},2)$.

Desarrollo

$$r\psi = 1 \Rightarrow \psi = \frac{1}{r} \quad \text{para} \quad r_1 = 2 \Rightarrow \psi_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad r_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \psi_2 = 2$$

$$r\psi = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\psi} \Rightarrow \frac{dr}{d\psi} = -\frac{1}{\psi^2}$$

$$L = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\psi = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{\frac{1}{\psi^2} + \frac{1}{\psi^4}}\, d\psi = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\sqrt{2+1}}{\psi^2}\, d\psi$$

$$= [\ln|\sqrt{1+\psi^2} + \psi| - \frac{\sqrt{1+\psi^2}}{\psi}] \Big/_{\frac{1}{2}}^{2} = \ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

1683 Hallar la longitud del arco de la espiral logarítmica $r = ae^{m}$ $(m > 0)$, que se encuentra dentro del circulo $r = a$.

Desarrollo

$$r = ae^{m} \Rightarrow \frac{dr}{d\psi} = ame^{m\psi}$$

$$L = \int_{-\infty}^{0} ae^{m} \sqrt{a + m^2}\, d\psi = \frac{a}{m} e^{m\psi} \sqrt{1+m^2} \Big/_{-\infty}^{0} = \frac{a}{m}\sqrt{1+m^2} - 0 = \frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}$$

1684 Hallar la longitud del arco de la curva $\psi = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ desde $r = 1$ hasta $r = 3$.

Desarrollo

De $\psi = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ despejamos "r", es decir

$r=\psi\pm\sqrt{\psi^2-1}$ como r $\geq$ 1 se tiene:

$$=\psi+\sqrt{\psi^2-1} \text{ de donde } \frac{dr}{d\psi}=1+\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2-1}} \text{ además como}$$

$$\psi=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r}) \quad \text{para } r_1=1,\ \psi_1=1,\ r_2=3,\ \psi_2=\frac{5}{3}$$

$$L=\int_{\psi_1}^{\psi_2}\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\psi})^2}\,d\psi=\int_1^{\frac{5}{3}}\sqrt{(\psi+\sqrt{\psi^2-1})^2+(1+\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2-1}})^2}\,d\psi$$

$$=\int_1^{\frac{5}{3}}\sqrt{(\psi+\sqrt{\psi^2-1})^2+\frac{(\psi+\sqrt{\psi^2-1})^2}{\psi^2-1}}\,d\psi=\int_1^{\frac{5}{3}}\sqrt{(\psi+\sqrt{\psi^2-1})^2\frac{\psi^2}{\psi^2-1}}\,d\psi$$

$$=\int_1^{\frac{5}{3}}(\psi+\sqrt{\psi^2-1})\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2-1}}\,d\psi=\int_1^{\frac{5}{3}}(\psi+\frac{\psi^2}{\sqrt{\psi^2-1}})d\psi$$

$$=[\frac{\psi^2}{2}+\frac{\psi}{2}\sqrt{\psi^2-1}+\frac{1}{2}\ln|\psi+\sqrt{\psi^2-1}|]\Big/_1^{\frac{5}{3}} \quad \text{por lo tanto } L=\frac{4+\ln 3}{2}$$

6.3. VOLUMENES DE CUERPOS SÓLIDOS.-

1 VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN.-

Los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución de un trapecio mixtilíneo, limitado por una curva y = f(x), el eje X y dos verticales x = a, x = b, alrededor de los ejes OX y OY, se expresan respectivamente por las fórmulas.

① $V_x=\int_a^b y^2dx$; ② $V_y=\int_a^b xy\,dx$

en el caso mas general, los volúmenes de los cuerpos engendrados por la rotación de una figura, limitada por las curvas.

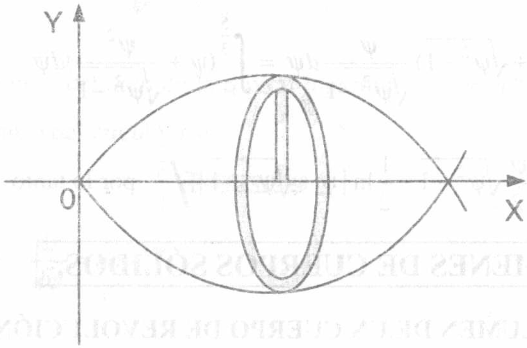
$$y_1 = f_1(x) \quad \text{e} \quad y_2 = f_2(x) \quad (\text{siendo} \quad f_1(x) \le f_2(x)).$$

Y por las rectas x = a, x = b, alrededor de los ejes de coordenadas OX, OY; serán respectivamente:

$$\boxed{V_x = \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx \quad \text{y} \quad V_y = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1)dx}$$

1685 Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación, alrededor del eje OX, de la superficie limitada por el eje OX y la parábola $y = ax - x^2$ (a > 0).

Desarrollo



$$y = ax - x^2 \Rightarrow y - \frac{a^2}{4} = -(x - \frac{a}{2})^2$$

$$V = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a (ax - x^2)^2 dx = \pi \int_0^a (a^2x^2 - 2ax^3 + x^4)dx$$

$$= \pi (\frac{a^2x^3}{3} - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^5}{5}) \Big/_0^a = \pi (\frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{2} + \frac{a^5}{5}) = \frac{\pi a^5}{30}$$

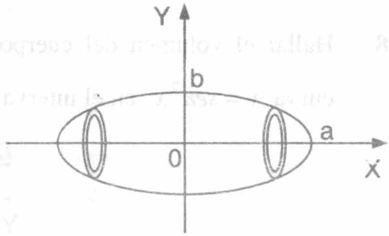
1686 Hallar el volumen del elipsoide, engendrado por la rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, alrededor del eje OX.

Desarrollo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ; \quad y^2=(1-\frac{x^2}{a^2})b^2$$

$$V=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\int_0^a(1-\frac{x^2}{a^2})b^2dx=2\pi(b^2x-\frac{x^3b^2}{3a^2})\Big/_0^a$$

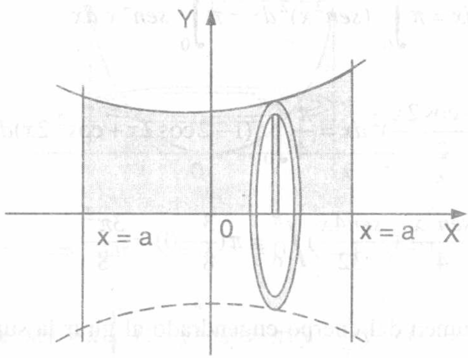
$$=2\pi(ab^2-\frac{ab^2}{3})-0=\frac{4\pi a}{3}b^2$$



1687 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la superficie limitada por la catenaria $y=a\cosh(\frac{x}{a})$, el eje OX, y las rectas x =±a

Desarrollo

$$y=a\cosh(\frac{x}{a})=a.\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2} \quad ; \quad y^2=\frac{a^2}{4}(e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}+2)$$



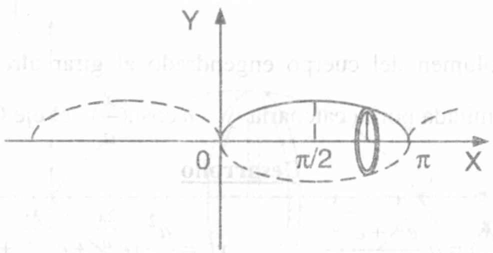
$$V=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\int_0^a \frac{a^2}{4}(e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}+2)dx=\frac{\pi a^2}{2}(\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}+2x)\Big/_0^a$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}(\frac{a}{2}e^2-\frac{a}{2}e^{-2}+2a-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+0)$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}(\frac{a}{2}e^2-\frac{a}{2}e^{-2}+2a)=\frac{\pi a^3}{4}(e^2-e^{-2}+4)$$

1688 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX, la curva $y=sen^2x$, en el intervalo $x=0$ hasta $x=\pi$

Desarrollo



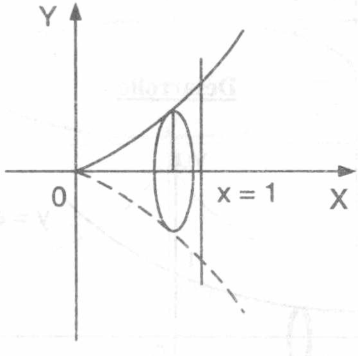
$$V=\pi\int_0^\pi y^2dx=\pi\int_0^\pi (sen^2x)^2dx=\pi\int_0^\pi sen^4x\,dx$$

$$=\pi\int_0^\pi (\frac{1-\cos 2x}{2})^2dx=\frac{\pi}{4}\int_0^\pi (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$=\pi(\frac{3x}{8}-\frac{sen^2x}{4}+\frac{sen4x}{32})\Big/_0^\pi=\pi(\frac{3}{8}-0)=\frac{3\pi^2}{8}$$

1689 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la superficie limitada por la parábola semicúbica $y^2=x^3$, el eje OX y la recta $x=1$, alrededor del eje OX.

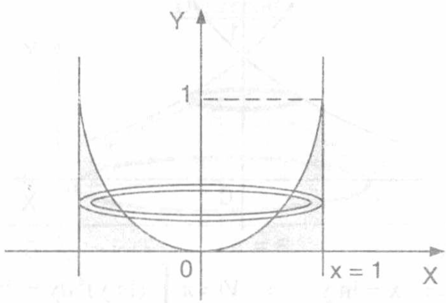
Desarrollo



$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1 x^3dx=\frac{\pi x^4}{4}\Big/_0^1=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

1690 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la misma superficie del problema (1689), alrededor del eje OY.

Desarrollo



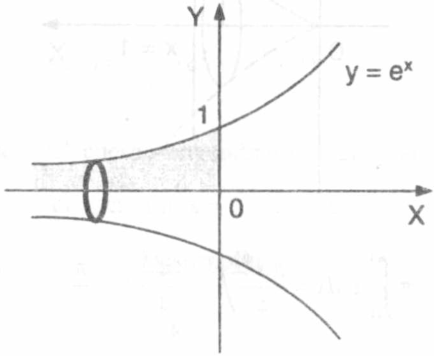
Como $y^2=x^3 \Rightarrow$ para x = 0, y = 0, x = 1, y = 1

$$V=\pi\int_0^1 (1-x^2)dy=\pi\int_0^1 (1-y^{\frac{4}{3}})dy=\pi(y-\frac{3}{7}y^{\frac{7}{3}})\Big/_0^1=\pi(1-\frac{3}{7})=\frac{4\pi}{7}$$

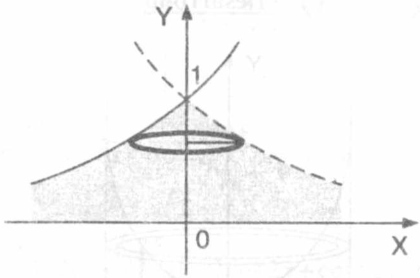
1691 Hallar los volúmenes de los cuerpos engendrados al girar las superficies limitadas por las líneas $y = e^x$, x = 0 e y = 0 alrededor.

a) Del eje OX **b)** Del eje OY

Desarrollo



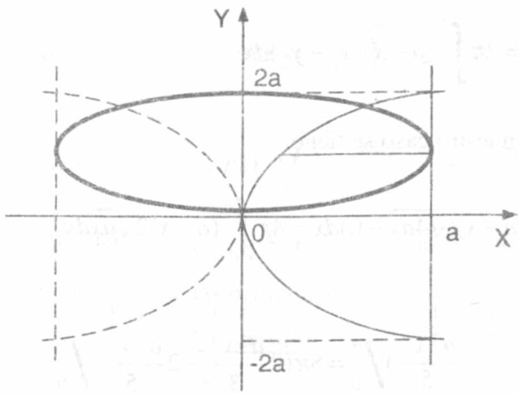
a) $V = \pi\int_{-\infty}^{0} y^2 dx = \pi\int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx = \frac{\pi}{2}e^{2x} \Big/_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$



b) $y = e^x \Rightarrow$ x = ln y $\Rightarrow V = \pi\int_0^1 (\ln y)^2 dy = 2\pi$

1692 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OY la parte de la parábola $y^2 = 4ax$ que intercepta la recta x = a.

Desarrollo

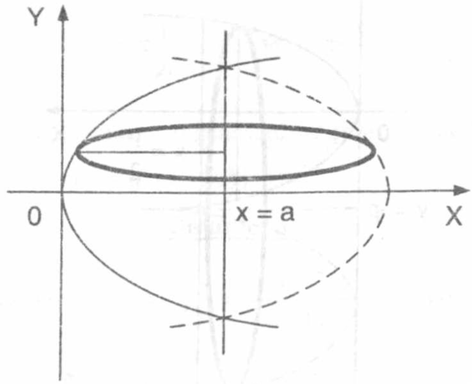


$$V = 2\pi\int_0^{2a}(a^2 - (\frac{y^2}{4a})^2)y = 2\pi(a^2 y - \frac{y^5}{80a^2})\Big/_0^{2a} = 2\pi(2a^3 - \frac{32a^5}{80a^2})$$

$$= 2\pi(2a^3 - \frac{2a^3}{5}) = \frac{16\pi}{5}a^3$$

1693 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor de la recta $x = a$, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$, que se intercepta por la misma recta.

Desarrollo



El volumen de la región cortada al girar alrededor de $x = a$, es:

$$V = 2\pi\int_a^b (a-x)(y_1 - y_2)dx$$

Luego para nuestro caso se tiene:

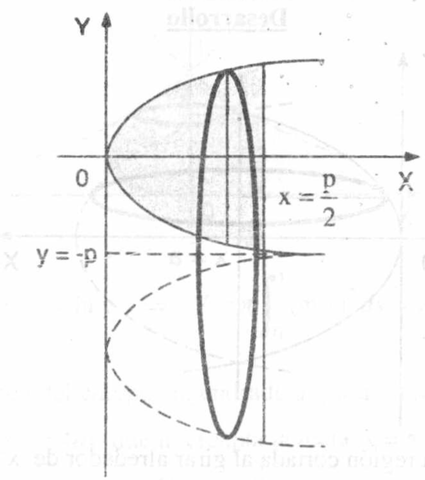
$$V = 4\pi\int_0^a (a-x)(\sqrt{4ax}-0)dx = 4\pi\int_0^a (a-x)2\sqrt{ax}dx$$

$$= 8\pi(a^{\frac{3}{2}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}})\Big/_0^a = 8\pi(2\frac{a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5})\Big/_0^a$$

$$= 8\pi(\frac{2a^3}{3} - \frac{2a^3}{5}) = 8\pi(\frac{10a^3 - 6a^3}{15}) = \frac{32a^3\pi}{15}$$

1694 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor de la recta y = -p, la figura limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y por la recta $x = \frac{p}{2}$.

Desarrollo

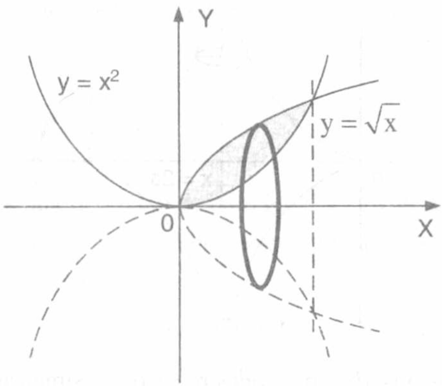


$$V=\pi\int_0^{\frac{p}{2}}[(p+\sqrt{2px})^2-(p-\sqrt{2px})^2]dx=\pi\int_0^{\frac{p}{2}}4p\sqrt{2px}\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}\,2p\,dx=2\pi[\frac{2}{3}(2px)^{\frac{3}{2}}]\Big/_0^{\frac{p}{2}}=\frac{4\pi}{3}[p^3-0]=\frac{4\pi\,p^3}{3}$$

1695 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX, la superficie comprendida entre las parábolas $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$

Desarrollo



$$V=\pi\int_0^1((\sqrt{x})^2-x^4)dx=\pi\int_0^1(x-x^4)dx=\pi(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5})\Big/_0^1=\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})=\frac{3\pi}{10}$$

1696 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girara alrededor del eje OX, el lazo de la curva $(x-4a)y^2=ax(x-3a)$.

Desarrollo

$(x-4a)y^2=ax(x-3a) \quad\Rightarrow\quad y^2=\dfrac{ax(x-3a)}{x-4a}$. Luego:

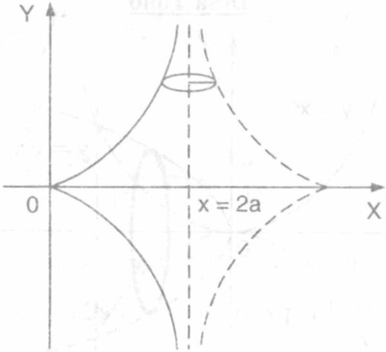
$$V=\pi\int_0^{3a}y^2dx=\pi\int_0^{3a}\frac{ax(x-3a)}{x-4a}dx=\pi\int_0^{3a}(ax+a^2+\frac{4a^3}{x-4a})dx$$

$$= \pi(\frac{ax^2}{2} + a^2x + 4a^3 \ln(x-4a)) \Big/_{0}^{3a} = \pi(\frac{15a^3}{2} + 4a^3 \ln(-\frac{a}{4a}))$$

$$= \pi(\frac{15a^3}{2} - 4a^3 \ln 4) = \frac{\pi a^3}{2}(15 - 16\ln 2)$$

1697 Hallar el volumen del cuerpo que se engendra al girar la cisoide $y^2 = \frac{x^2}{2a-x}$ alrededor de su asintota x = 2a.

Desarrollo



$V = 2\pi \int_a^b (2a-x)y\, dx$; para nuestro caso por simetría se tiene:

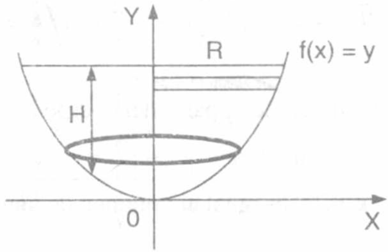
$$V = 4\pi \int_0^{2a} (2a-x)x\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}}dx = 4\pi \int_0^{2a} \sqrt{(2a-x)}.x\sqrt{x}\,dx$$

calculando la integral, completando cuadrados se tiene: $V = 2\pi^2 a^3$

1698 Hallar el volumen del paraboloide de revolución, si el radio de su base es R y su altura es H.

Desarrollo

La ecuación de la parábola es $x^2 = ky$ de donde $x = \sqrt{ky}$ cuando x = R, y = H, luego $k = \frac{R^2}{H}$ como: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$



Entonces para nuestro caso se tiene:

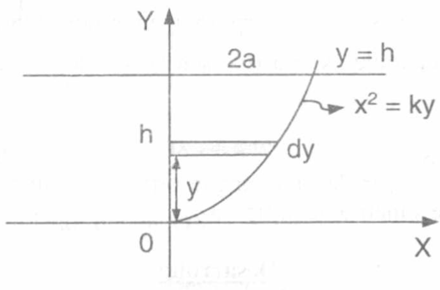
$$V=\pi\int_0^H(\sqrt{xy})^2\,dy=\pi\int_0^H ky\,dy=\pi k\frac{y^2}{2}\Big/_0^H=\pi k\frac{H^2}{2}\quad \text{como}\quad k=\frac{R^2}{H}$$

$$V=\pi\frac{H^2}{2}\left(\frac{R^2}{H}\right)=\pi\frac{HR^2}{2}$$

1699 Un segmento parabólico recto de base igual a 2a y de altura h gira alrededor de su base. Determinar el volumen del cuerpo de revolución que se engendra ("Limón" de Cavalieri).

Desarrollo

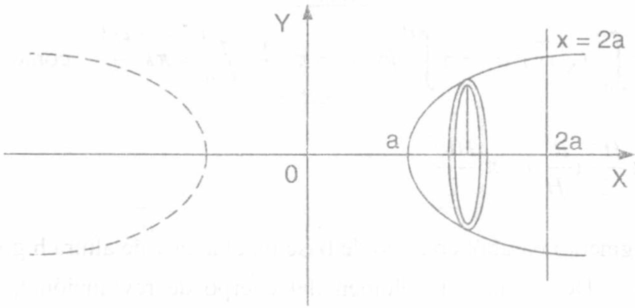
Cuando y =h, x = 2a; Luego $k=\frac{4a^2}{h}$ como: $x^2=ky \Rightarrow x=\sqrt{ky}=g(y)$; por el método de la corteza cilíndrica al hacer rotar alrededor de la recta x = h, se tiene: $V=2\pi\int_a^b (k-y)g(y)dy$, por lo tanto:



$$V = 2\pi\int_0^h (h-y)\sqrt{ky}\,dy = 2\pi k^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}hy^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big/_0^h = \frac{16}{15}\pi a h^2 \quad \text{donde} \quad k = \frac{4a^2}{h}$$

1700 Demostrar que el volumen de la parte del cuerpo de revolución, engendrado al girar la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ alrededor del eje OX que intercepta al plano x = 2a, es igual al volumen de una esfera de radio a.

<u>**Desarrollo**</u>



$$V = \pi\int_a^{2a} y^2 dx = \pi\int_a^{2a}(x^2 - a^2)dx = \pi(x^{\frac{2}{3}} - a^2x)\Big/_a^{2a}$$

$$= [(\frac{8a^3}{3} - 2a^3) - (\frac{a^3}{3} - a^3)] = \pi(\frac{2a^3}{3} + \frac{2a^3}{3}) = \frac{4\pi a^3}{3}$$

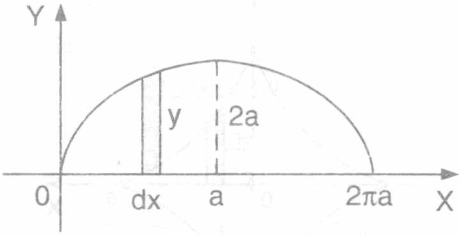
que es el volumen de una esfera de radio a.

1701 Hallar los volúmenes de los cuerpos engendrados al girar la figura limitada por un arco de la cicloide x = a (t – sen t), y = a (1 – cos t) y por el eje OX alrededor de:

a) Del eje OX. b) Del eje OY.

c) Del eje de simetría de la figura.

<u>**Desarrollo**</u>



b) Al hacer girar el tubo cilíndrico alrededor del eje Y se tiene:

$V = 2\pi\int xy\,dx$; de donde para x = 0, t = 0 ; x = 2πa, t = 2π

Luego: $V = \int_0^{2\pi} 2\pi xy\,dx = 2\pi\int_0^{2\pi} a(t-sent)a(1-\cos t)^2 a\ dt$

$$V = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2(t-sent)dt = 6\pi^3a^3$$

c) El eje de simetría es x = πa, y el volumen de este rectángulo rotado alrededor de la figura es dV = 2π(πa – x) y dx, de donde:

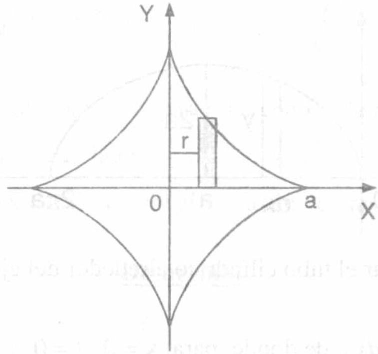
$$V = \int_0^{\frac{\pi}{a}} dV = 2a^3\pi\int_0^{\pi}(\pi - t + sent)(1-\cos t)^2\,dt$$

$$V = 2a^3\pi\int_0^{\pi}(\pi - t + sent)(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2})dt$$

$$\therefore\quad V = \frac{\pi a^3(9\pi^2-16)}{6};\quad \text{sugerencia:}\quad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

1702 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = asen^3 t$, alrededor del eje OX.

Desarrollo



$x = a\cos^3 t\ ,\quad \cos^3 t = \frac{x}{a};\quad y = asen^3 t\ ,\quad sen^3 t = \frac{y}{a}$

$\cos^2 t = (\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}\ ,\quad sen^2 t = (\frac{y}{a})^{\frac{2}{3}}$ entonces $sen^2 t + \cos^2 t = (\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{a})^{\frac{2}{3}} = 1$

de donde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\ ;\quad y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$$V = 2(2\pi\int_0^a x(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dy) = \frac{32}{105}\pi a^2$$

1703 Hallar el volumen del cuerpo que resulta de la rotación de cardioide $r = a\ (1 + \cos\psi)$ alrededor del eje polar.

<u>**Desarrollo**</u>

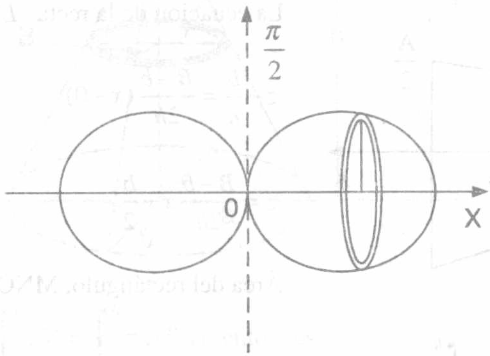
Como $V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3 sen\theta\, d\theta$, entonces

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3(1+\cos\psi)^3 sen\psi\ d\psi = -\frac{2\pi a^3}{3}\frac{(1+\cos\psi)^4}{4}\Big/_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi a^3}{6}[(1-1)^4 - (1+1)^4] = \frac{16\pi a^3}{6} = \frac{8\pi a^3}{3}$$

1704 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la curva $r = a\cos^2 \psi$ alrededor del eje polar.

Desarrollo



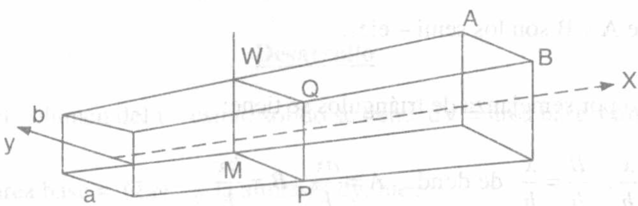
La variación de la integral desde $\psi = 0$ hasta $\psi = \frac{\pi}{2}$

luego $V = 2(\frac{2\pi}{3})\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^3 sen\psi\ d\psi) = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos^6 \psi\ sen\psi\ d\psi$

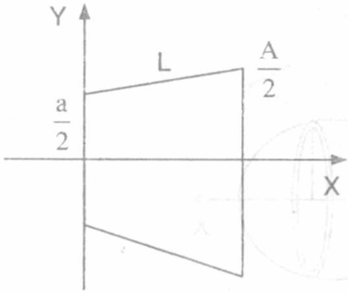
$$V = \frac{4\pi a^3}{3}(-\frac{\cos^7 \psi}{7})\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi a^3}{21}(-0+1) = \frac{4\pi a^3}{21}$$

1705 Hallar el volumen del obelisco, cuyas bases paralelas son rectángulos de lados A, B y a, b y la altura es igual a h.

Desarrollo



La ecuación de la recta L: $y-\frac{a}{2}=\frac{\frac{A}{2}-\frac{a}{2}}{h}(x-0) \Rightarrow y=\frac{A-a}{2h}x+\frac{a}{2}$



La ecuación de la recta L':

$$z-\frac{b}{a}=\frac{B-b}{2h}(x-0)$$

$$z=\frac{B-b}{2h}x+\frac{b}{2}$$

Área del rectángulo, MNOP es: A = (2y).(2z)

$$V=\int_0^h A\,dx=\int_0^h (2y)(2z)dx$$

$$V=4\int_0^h yz\,dx=4[\frac{(A-a)(B-b)}{4h^2}.\frac{x^3}{3}+\frac{(A-a)b}{4h}.\frac{x^2}{2}+\frac{(B-b)a}{4h}.\frac{x^2}{2}+\frac{ab}{4}x]\Big/_0^h$$

$$V=\frac{h}{3}(AB+\frac{Ab}{2}+\frac{Ba}{2}+ab)=\frac{h}{3}(AB+\frac{Ab+aB}{2}+ab)$$

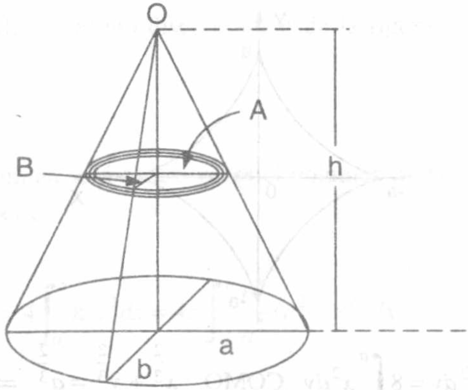
1706 Hallar el volumen del cono elíptico recto, cuya base es una elipse de semi – ejes a y b, y cuya altura es igual h.

Desarrollo

El i – esimo disco elíptico de la figura tiene por volumen dV = πAB dx, donde A y B son los semi – ejes.

Luego por semejanza de triángulos se tiene:

$\frac{A}{a}=\frac{x}{h}$, $\frac{B}{b}=\frac{x}{h}$ de donde $A=\frac{ax}{h}$, $B=\frac{bx}{h}$



Como $V=\int_0^h dV=\int_0^h \pi\, AB\, dx$ entonces.

$$V=\pi\int_0^h \frac{ax}{h}.\frac{bx}{h}dx=\frac{ab\pi}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{ab\pi}{h^2}(\frac{x^3}{3})\Big/_0^h=\frac{ab\pi h^3}{3h^2}-0$$

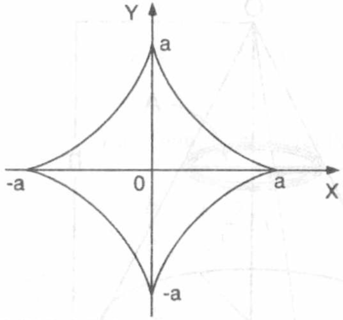
$$\therefore\ V=\frac{ab\pi h}{3}$$

1707 Sobre las cuerdas de la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ paralelas al eje OX, se han construido unos cuadrados, cuyos lados son iguales a las longitudes de las cuerdas y los planos en que se encuentren son perpendiculares al plano XOY. Hallar el volumen del cupero que forman estos cuadrados.

Desarrollo

Para el volumen del i – esimo sólido se tiene dV = área base x altura

pero área base = $(2x)^2$ y la altura es dy, luego:



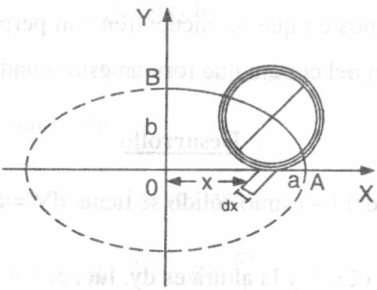
$$V = 2\int_0^a (2x)^2 dy = 8\int_0^a x^2 dy \quad \text{COMO:} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; x^2 = (a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^3$$

$$V = 8\int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})dy = 8\int_0^a (a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{3}} - y^2)dy$$

$$V = 8(a^2 y - \frac{9a^{\frac{4}{3}}}{5} y^{\frac{5}{3}} + \frac{9a^{\frac{2}{3}}}{7} y^{\frac{7}{3}}) \Big/_0^a = \frac{128}{105} a^3$$

1708 Un círculo deformable se desplaza de tal forma que, uno de los puntos de su circunferencia descansa sobre el eje OY, el centro describe la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, mientras que el plano del círculo es perpendicular al plano XOY, hallar el volumen del cuerpo engendrado por dicho círculo.

Desarrollo



El volumen de i – esimo disco circular de la figura es $dV = \pi y^2 dx$; donde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

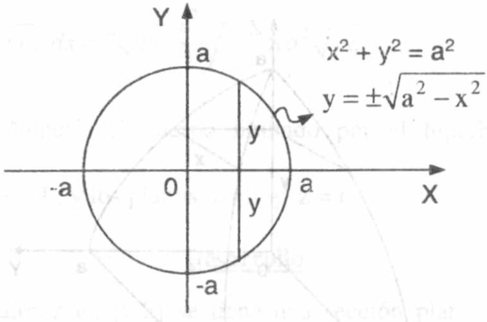
Luego el volumen será cuatro veces el volumen de la región comprendida por le arco de AB es:

$$V = 4\int_0^a dV = 4\int_0^a \pi\, y^2 dx = 4\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$= 4\frac{b^2}{a^2}(a^2x - x^{\frac{3}{2}}) \Big/_0^a = \frac{4b^2\pi}{a^2}(a^3 - a^{\frac{3}{2}}) = \frac{8b^2a^3\pi}{3a^2} = \frac{8\pi ab^2}{3}$$

1709 El plano de un triangulo móvil permanece perpendicular al diámetro fijo de un círculo de radio a. La base del triángulo es la cuerda de dicho círculo mientras que su vértice resbala por una recta paralela al diámetro fijo que se encuentra a una distancia h del plano del círculo. Hallar el volumen del cuerpo (llamado conoide) engendrado por el movimiento de este triángulo desde un extremo del diámetro hasta el otro.

Desarrollo



$$A = \frac{2y.h}{2} = y.h \quad\Rightarrow\quad A(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\,h$$

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,h\,dx=2h\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=2a^2h\left[\frac{arcsen\frac{x}{a}}{2}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a}\cdot\frac{x}{a}\right]\Big/_0^a=2a^2h\left(\frac{\pi}{4}\right)\qquad\therefore\quad V=\frac{\pi a^2h}{2}$$

1710 Hallar el volumen del cuerpo limitado por los cilindros $x^2+z^2=a^2$ e $y^2+z^2=a^2$.

Desarrollo

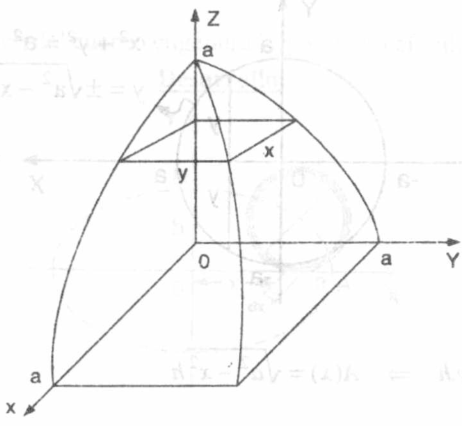
Las ecuaciones de los cilindros es: $x^2+z^2=a^2$ **... (1)**

$y^2+z^2=a^2$ **... (2)**

de (1) se tiene: $x=\sqrt{a^2-z^2}$; de (2) se tiene: $y=\sqrt{a^2-z^2}$

además el área de la sección es: xy, es decir el área = $xy=a^2-z^2$ Luego:

$$V=8\int_0^a(a^2-z^2)dz=8\left(a^2z-\frac{z^3}{3}\right)\Big/_0^a=8\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{16a^3}{3}$$



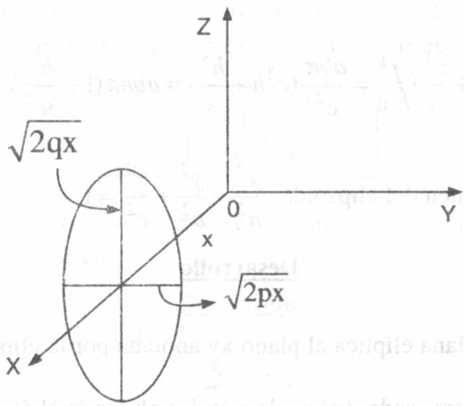
1711 Hallar el volumen del segmento parabólico elíptico $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}\leq x$, interceptado por el plano x = a.

Desarrollo

La sección del sólido determinado por un plano paralelo al plano y^z a una distancia x del origen, es una elipse cuya área es:

A = π zy como $y=\sqrt{2px}$, $z=\sqrt{2qx}$

luego: $A=\pi\sqrt{2px}.\sqrt{2qx}=2\pi x\sqrt{pq}$. Por lo tanto:



$$V=\int_0^a 2\pi x\sqrt{pq}\,dx=2\sqrt{pq}\frac{x^2}{2}\Big/_0^a=\pi a^2\sqrt{pq}$$

1712 Hallar el volumen del cuerpo limitado por el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; y los planos z =0 y z = h.

Desarrollo

Para cada valor z en [0,h] se tiene una sección plana elíptica al plano XY anotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2+z^2}{c^2}$ el área de la sección plano es = π.

(producto de semi – ejes), como $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2+z^2}{c^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{c}\sqrt{c^2+z^2} \\ y=\frac{b}{c}\sqrt{c^2+z^2} \end{cases} \quad \text{luego:} \quad V=\int_0^h \pi xy\,dz$$

$$V=\pi\int_0^h \frac{a}{c}\sqrt{c^2+z^2}\,\frac{b}{c}\sqrt{c^2+z^2}\,dz=\frac{ab\pi}{c^2}\int_0^h (c^2+z^2)dz$$

$$=\frac{ab\pi}{c^2}(c^2z+\frac{z^3}{3})\Big/_0^h=\frac{ab\pi}{c^2}(c^2h+\frac{h^3}{3})=abh\pi(1+\frac{h^2}{3c^2})$$

1713 Hallar el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Desarrollo

Una sección plana elíptica al plano xy anotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2-z^2}{c^2}$

se obtiene para cada valor de z en [-c,c] donde el área de dicha sección es: a = π por el producto de sus semi – ejes de la elipse, donde se tiene:

$x=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}$ y $y=\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}$ luego:

$$V=\int_{-c}^{c} A\,dz=\int_{-c}^{c}\pi\frac{ab}{c^2}\sqrt{c^2-z^2}.\sqrt{c^2-z^2}\,dz=\frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}(c^2-z^2)dz$$

$$=\frac{\pi ab}{c^2}(\frac{c^2z-z^3}{3})\Big/_{-c}^{c}=\frac{\pi ab}{c^2}[(c^3-\frac{c^3}{3})-(-c^3-\frac{c^3}{3})]=\frac{4}{3}\pi abc$$

6.4. AREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION.-

El área de una superficie engendrada por la rotación alrededor del OX, del arco de una curva regular y = f(x) entre los puntos x = a y x = b, se expresa por la formula:

$$\boxed{S_x = 2\int_a^b y\frac{ds}{dx}dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx} \quad \textbf{... (1)}$$

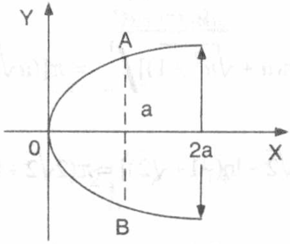
donde ds es la diferencial del arco de la curva.

Cuando la ecuación de la curva se da de otra forma, el área de la superficie S_x, se obtiene la formula (1), efectuando los correspondientes cambios de variables. es decir:

$$\boxed{S_y = 2\int_c^d x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy}$$

1714 En la figura se dan las dimensiones de un espejo parabólico AOB. Hallar la superficie de este espejo.

Desarrollo



sea $y^2 = 4px$ el punto a(a,4a), de donde $16a^2 = 4ap$ entonces p = 4a

por lo tanto $y^2 = 16ax \Rightarrow y' = 2\sqrt{\frac{a}{x}}$

$$A = 2\pi\int_0^a y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^a 4\sqrt{ax}\sqrt{1+\frac{4a}{x}}dx = 8\pi a\int_0^a \sqrt{x+4a}\,dx$$

$$= 8\pi\sqrt{a}\,\frac{(x+4a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big/_{0}^{a} = \frac{16\pi}{3}\sqrt{a}[(5a)^{\frac{3}{2}} - (4a)^{\frac{3}{2}}] = \frac{16\pi}{3}a^2(5\sqrt{5}-8)$$

1715 Hallar el área de la superficie del "huso" que resulta al girar una semi – onda de la sinusoide y = sen x, alrededor del eje OX.

Desarrollo

Un arco completo de la curva y = sen x se obtiene haciendo varias x desde x = 0 hasta x = π como:

$$A = 2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^{\pi} senx\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = 2\pi\int_0^{\pi} senx\sqrt{1+\cos^2 x}\ dx$$

consideremos u = cos x ⇒ du = - sen x dx

cuando x = 0, u =1; x = π, u = -1. luego:

$$A = 2\pi\int_0^{\pi} senx\sqrt{1+\cos^2 x}\ dx = 2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+u^2}\,(-du) = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi[\frac{u}{2}\sqrt{u^2+1} + \frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+1})]\Big/_{-1}^{1} = \pi[(u\sqrt{u^2+1} + \ln(u+\sqrt{u^2+1}))]\Big/_{-1}^{1}$$

$$= \pi[(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - \ln(-1+\sqrt{2})] = \pi(2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}) = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))$$

1716 Hallar el área de la superficie engendrada por la rotación de la parte de tangentoide y = tg x, comprendida entre x = 0 y $x = \frac{\pi}{4}$ alrededor del eje OX.

Desarrollo

$$A = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\sqrt{1+\sec^4 x}\ dx$$

sea $u = \operatorname{tg} x \Rightarrow du = \sec^2 x\, dx \Rightarrow \dfrac{du}{u^2+1} = dx$

$$A = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\sqrt{1+\sec^4 x}\, dx = 2\pi\int_0^1 u\sqrt{(u^2+1)^2+1}\,\frac{du}{u^2+1}$$

sea $z = u^2+1 \Rightarrow \dfrac{dz}{2} = u\, du$

$$A = 2\pi\int_0^1 u\sqrt{(u^2+1)^2+1}\,\frac{du}{u^2+1} = 2\int_1^2 \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}dz$$

$A = 2\pi\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}dz$ efectuando la integral, se tiene:

$$A = \pi(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \pi\ln\frac{2(\sqrt{2}+2)}{\sqrt{5}+1}$$

1717 Hallar el área de la superficie engendrada por la rotación alrededor del eje OX, del arco de la curva $y = e^{-x}$ comprendido entre $x = 0$ y $x = +\infty$.

Desarrollo

$$y = e^{-x} \Rightarrow y' = -e^{-x} \Rightarrow y'^2 = e^{-2x}$$

$$A = 2\int_0^{+\infty} y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx$$

sea $u = e^{-x} \Rightarrow du = e^{-x}dx$, para $x = 0$, $u = 1$; $x = +\infty$, $u = 0$

$$A = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx = e\int_1^0 \sqrt{1+u^2}\,du = 2\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi(\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u+1+u^2)\Big/_0^1 = \pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$$

1718 Hallar el área de la superficie (denominada catenoide), engendrada por la rotación e la catenaria $y = a\cosh\frac{x}{a}$ alrededor del eje OX, entre los limites $x = 0$ y $x = a$.

Desarrollo

$$y = a\cosh\frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = senh\frac{x}{a}$$

$$A = 2\pi\int_0^a y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx = 2\pi\int_0^a a\cosh\frac{x}{a}\sqrt{1+senh^2\frac{x}{a}}dx$$

$$A = 2\pi\int_0^a a\cosh\frac{x}{a}.\cosh\frac{x}{a}dx = 2a\pi\int_0^a \cosh^2\frac{x}{a} = \pi a\int_0^a (\cosh\frac{2x}{a}+1)dx$$

$$= \pi[a\frac{a}{2}senh\frac{2x}{a}+x]\Big/_0^a = \pi a^2(\frac{senh^2 x}{2}+1) = \frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$$

1719 Hallar el área de la superficie de revolución de la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ alrededor del eje OY.

Desarrollo

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}$$

$$A = 2(2\pi)\int_0^a x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}dx = 4\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}})\sqrt{1+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}}dy$$

$$= 4\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\frac{a^{\frac{1}{3}}dy}{y^{\frac{1}{3}}} = 6\pi a^{\frac{1}{3}}[(\frac{a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{\frac{5}{2}})^{\frac{5}{2}}]\Big/_0^a = -\frac{12\pi a^{\frac{1}{3}}}{5}[0-(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}]$$

$$A = -\frac{12\pi a^{\frac{1}{3}}}{5}(-a^{\frac{5}{3}}) = \frac{12\pi a^2}{5}$$

1720 Hallar el área de la superficie de revolución de la curva $x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y$ y alrededor del eje OX, comprendida entre y = 1 e y = e.

Desarrollo

$$A = 2\pi\int_1^e x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy$$

$$A = 2\pi\int_1^e (\frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y)\sqrt{1+(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y})^2}\,dy = \frac{\pi}{4}\int_1^e (y^2 - 2\ln y)\sqrt{2+y^2+\frac{1}{y^2}}\,dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e (\frac{y^2 - 2\ln y}{y})(y^2+1)dy = \frac{\pi}{4}\int_1^e (y^3 - 2y\ln y - 2\frac{\ln y}{y})dy$$

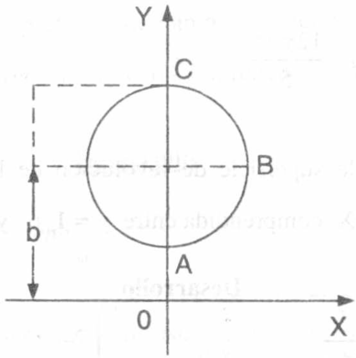
$$= \frac{\pi}{4}(y^{\frac{4}{4}} - y^2\ln y + y^2 - \ln^2 y)\Big/_1^e = \frac{\pi}{4}(\frac{e^4-29}{4}) = \frac{\pi(e^4-29)}{16}$$

1721 Hallar el área de la superficie del tuvo engendrado por la rotación del círculo $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ alrededor del eje OX (b > a).

Desarrollo

Como $x^2 + (y-b)^2 = a^2 \Rightarrow y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$

Primero calcula el área A_1 de la superficie engendrado por la rotación del arco CB, como el arco CB esta definido por la ecuación: $y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le x \le a$ de donde



$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{además} \quad A_1=2\pi\int_0^a y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

$$A_1=2\pi\int_0^a (b+a^2-x^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^a (b+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_0^a (\frac{b}{\sqrt{a^2-x^2}}+1)dx$$

$$=2ab\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\Big/_0^a+2\pi ax\Big/_0^a=2ab\pi(arcsen(1)-arcsen0)+2\pi a^2=ab\pi^2+2\pi a^2$$

ahora calcularemos el área A_2 de la superficie engendrada por la rotación del arco AB donde el arco AB es definido por la ecuación $y=b-\sqrt{a^2-x^2}$; $0\le x\le a$ de donde $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ como:

$$A_2=2\int_0^a y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx=2\int_0^a (b-\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$=2\int_0^a (b-\sqrt{a^2-x^2})\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\pi ab\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\Big/_0^a-2ax\Big/_0^a=\pi^2ab-2\pi a^2$$

Luego por simetría calcularemos el área A de la superficie del tubo, es decir:

$$A = 2(A_1 + A_2) = 2[\pi^2 ab + 2\pi a^2 + \pi^2 ab - 2\pi a^2] = 4ab\pi^2$$

1722 Hallar el área de la superficie engendrada al girar la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor:

1) Del eje OX **2)** Del eje OY (a > b)

Desarrollo

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, parametrizando la ecuación se tiene

x = a cos t, y = b sen t para x = 0, $t = \frac{\pi}{2}$; x = a, t = 0

además: $A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$

$$A = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} bsent\sqrt{a^2 sen^2 t + b^2 \cos^2 t}\ dt = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\cos t\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)sen^2 t}\ dt$$

$$= 2\pi b \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t\sqrt{b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2 sent)^2}}\, dt$$

haciendo el calculo de la integral se tiene: $A = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{E} arcsenE$

donde $E = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ en forma similar para la otra parte se obtiene:

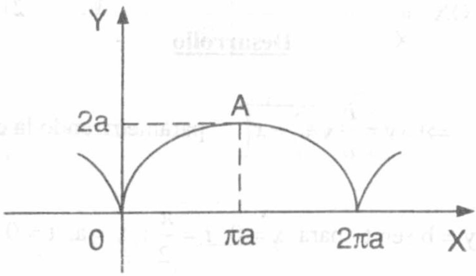
$$A = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{E}\ln\frac{1+E}{1-E} \quad \text{donde} \quad E = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

1723 Hallar el área de la superficie engendrada al girar uno de los arcos de la cicloide x = a (t – sent t); y = a (1 – cos t), alrededor:

a) Del eje OX **b)** Del eje OY

c) De la tangente a la cicloide en su punto superior.

Desarrollo



$$A = 2\pi\int_0^B y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

x = a (t – sen t) $\Rightarrow \quad x'(t) = a(1-\cos t)$

y = a (1 – cos t) $\Rightarrow \quad y'(t) = asent$

$$A = 2\pi\int_0^a a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 sen^2 t}\,dt = 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$sen^2\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{2} \Rightarrow \quad 1-\cos t = 2sen^2\frac{t}{2}$$

$$A = 2\pi a^2\int_0^{2\pi} 2sen^2\frac{t}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}sen(\frac{t}{2})dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi} sen^3\frac{t}{2}dt$$

$$= 8\pi a^2(-2\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2})\Big/_0^{2\pi} = 8\pi a^2(2+\frac{2}{3}) = \frac{64\pi a^2}{3}$$

b) En forma similar cuando es alrededor del eje Y, de donde $A = 16\pi^2 a^2$

c) Un arco completo de la cicloide se obtiene haciendo variar t en el intervalo $[0,2\pi]$ y además el punto mas alto es en $t = \pi$ puesto que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{asent}{a(1-\cos t)}$$

Luego la pendiente en $t = \pi$ es: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi=0}$, por lo tanto la ecuación de la tangente es $y = 2a$.

Luego la distancia del punto $p(x,y)$ dela cicloide a la recta tangente es $(2\pi a - y)$ de donde el área pedida es:

$$A = 2\pi\int_0^{2\pi}(2a-y)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

de donde al simplificar se tiene:

$$A = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}sen\frac{t}{2}dt = -\frac{16\pi a^2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big/_0^{2\pi} = \frac{32\pi a^2}{3}$$

1724 Hallar el área de la superficie engendrada por la rotación alrededor del eje OX de la Cardioide $x = a(2\cos t - \cos 2t)$; $y = a(2\ sen\ t - sen\ 2t)$.

Desarrollo

$x = a(2\cos t - \cos 2t) \Rightarrow x' = a(-2sent + 2sen2t)$

$y = a(2\ sen\ t - sen\ 2t) \Rightarrow y' = a(2\cos t - 2\cos 2t)$

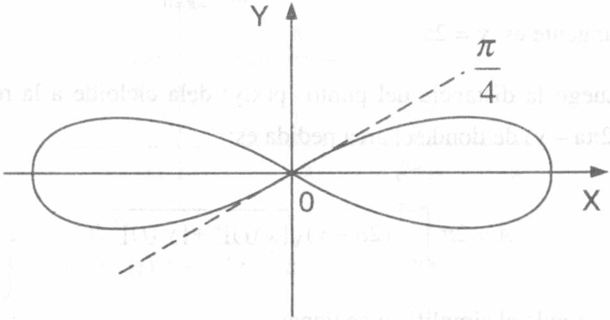
$$A = 2\int_0^{\pi} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

$$A = 4\pi\sqrt{2}a^2\int_0^{\pi} 2(sent - sent\cos t)\sqrt{1-\cos t}\ dt = 8\pi\sqrt{2}a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}} sent\ dt$$

$$A = \frac{16}{5}\sqrt{2}\pi a^2(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\Big/_0^{\pi} = \frac{128}{5}\pi a^2$$

1725 Hallar el área de la superficie engendrada al girar la Lemiscata $r^2 = a^2\cos 2\psi$ alrededor del eje polar.

Desarrollo



Por simetría se tiene: $A = 2(2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} rsen\psi\sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\psi})^2}d\psi)$

$$A = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\psi}\,sen\psi\sqrt{a^2\cos 2\psi + \frac{a^2 sen^2 2\psi}{\cos 2\psi}}d\psi$$

$$A = 4\pi a\int_0^{\frac{\pi}{4}} asen\psi\ d\psi = -4\pi a^2\cos\psi\Big/_0^{\frac{\pi}{4}} = -4\pi a^2[\frac{\sqrt{2}}{2} - 1] = 2(1-\sqrt{2})\pi a^2$$

1726 Hallar el área de la superficie engendrada por la rotación de la cardioide r = 2a (1 + cos ψ) alrededor del eje polar.

Desarrollo

Se tiene: $A = 2\pi \int_0^{\pi} rsen\psi \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\psi})^2}\, d\psi$

$$A = 2\pi \int_0^{\pi} 2a(1+\cos\psi)sen\psi \sqrt{4a^2(1+\cos\psi)^2 + 4a^2 sen^2\psi}\, d\psi$$

$$A = 8\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\psi)sen\psi \sqrt{1+2\cos\psi + \cos^2\psi + sen^2\psi}\, d\psi$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} sen\psi(1+\cos\psi)\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\psi}\, d\psi$$

$$= 8\pi a^2 \sqrt{2} \int_0^{\pi} (1++\cos\psi)^{\frac{3}{2}} sen\psi\ d\psi = -8\pi a^2 \sqrt{2}\, \frac{(1+\cos\psi)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big/_0^{\pi}$$

$$A = -\frac{16}{5}\sqrt{2}\pi a^2 (1+\cos\psi)^{\frac{5}{2}} \Big/_0^{\pi} \qquad \therefore \quad A = \frac{128\pi a^2}{5}$$

6.5. MOMENTOS, CENTROS DE GRAVEDAD, TEOREMAS DE GULDIN.

1 MOMENTO ESTÁTICO.-

Se llama momento estático de un punto material A, de masas m, situado a una distancia d, del eje 1, con respecto a este mismo eje 1, a la magnitud $M_1 = md$.

Se denomina momento estático de un sistema de n – puntos materiales, de masas $m_1, m_2, ..., m_n$ situados en el mismo plano que el eje 1, con respecto al cual se toman y separados de el por la distancias $d_1, d_2, ..., d_n$ la suma es:

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \qquad ...\ (\alpha)$$

debiendo tomarse la distancia de los puntos que se encuentran a un lado del eje 1, con signo mas (+), y los que están al otro lado con signo menos (-), en forma similar se determina el momento estático de un sistema de puntos con respecto a un plano. Si la masa ocupa continuamente toda una línea o una figura del plano XOY, los momentos estáticos M_x y M_y, respecto a los ejes de coordenadas OX y OY en lugar de la suma (α), se expresa por las correspondientes integrales.

Cuando se trata e figuras geométricas, la densidad se considera igual a la unidad en particular:

1. Para la curva x = x(s); y = y(s), donde el parámetro s es la longitud del arco, tenemos:

$$\boxed{M_x = \int_0^L y(s)ds\ ;\ M_y = \int_0^L x(s)ds}$$

donde $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ es la diferencial del arco.

2. Para una figura plana, limitada por la curva y = y(x), el eje OX y dos verticales x = a e y = b, obtenemos:

$$\boxed{M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y\,|\,y\,|\,dx\,,\ \ M_y = \int_a^b x\,|\,y\,|\,dx}$$

2 MOMENTO DE INERCIA.-

Se llama momento de inercia, respecto a un eje 1, de punto material de masa m, situado a una distancia d, de dicho eje 1, a un número $I_1 = md^2$. Se denomina momento de inercia a un eje 1 de un sistema de n puntos materiales, de masa m_1, m_2, ..., m_n a la suma:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

donde $d_1, d_2, \ldots, d_n$ son las distancias desde los puntos al eje 1, cuando la masa es continua en lugar de la suma, obtendremos la integral correspondiente.

③ CENTRO DE GRAVEDAD.-

Las coordenadas del centro de gravedad de una figura plana (ya sea arco o superficie) de masa M, se calcular por la formula:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}}$$

donde M_x, M_y son los momentos estáticos de las masas, cuando se trata de figuras geométricas, la masa M es numéricamente igual al correspondiente arco o al área. Para las coordenadas del centro de gravedad $(\overline{X}, \overline{Y})$ de un arco de curva plana y = f(x), (a ≤ x ≤ b), que une los puntos A(a), f(a) y B(b), f(b) tenemos:

$$\boxed{X = \frac{\int_A^B x\,ds}{s} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}, \quad Y = \frac{\int_A^B y\,ds}{s} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}}$$

Las coordenadas del centro de gravedad $(\overline{X}, \overline{Y})$ del trapecio mixtilíneo $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ se puede calcular por las fórmulas:

$$\boxed{X = \frac{\int_a^b xy\,dx}{s}, \quad Y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{s}}$$

donde $ds = \int_a^b y\,dx$ es el área de la figura.

En forma similar se emplea para hallar las coordenadas del centro de gravedad de los cuerpos sólidos.

4 TEOREMA DE GULDIN.-

TEOREMA 1.- El área de la superficie engendrada por la rotación del arco de una curva plana alrededor de un eje situado en el mismo plano que la curva, pero que no se corta con ella, es igual al producto de la longitud de dichos arcos por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad del mismo.

TEOREMA 2.- El volumen del cuerpo engendrado por la rotación de una figura plana alrededor de un eje, situado en el mismo plano que la figura, pero que no se corte con ella, es igual al producto del área de dicha figura por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la misma.

1727 Hallar los momentos estáticos, respecto a los ejes de coordenados, del segmento de la línea recta.

Desarrollo

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, comprendidos entre dichos ejes de coordenados

Los momentos estáticos respecto a los ejes coordenados es:

$$M_x=\int_a^b y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx\,,\quad M_y=\int_a^b x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy$$

como $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \;\Rightarrow\; y=\frac{b}{a}(a-x)\,,\;\; \frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}$

$$M_x = \int_0^a \frac{b}{a}(a-x)\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}dx = -\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}.\frac{(a-x)^2}{2} \Big/_0^a$$

$$M_x = -\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2}[0-a^2] = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

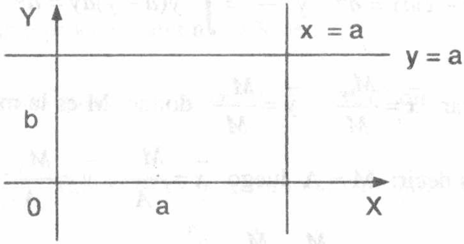
$$M_y = \int_0^b x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}dy, \text{ donde } x = \frac{a}{b}(b-y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{a}{b}$$

$$M_y = \int_0^b \frac{a}{b}(b-y)\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}dy = -\frac{a}{b^2}\sqrt{a^2+b^2}\frac{(b-y)^2}{2} \Big/_0^b$$

$$M_y = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b^2}[0-b^2] = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

1728 Hallar los momentos estáticos del rectángulo de lados a y b, respecto a estos mismos lados.

Desarrollo



Para el eje y = b, se tiene: $M_b = \int_0^a bx\,dx = \frac{a^2b}{2}$

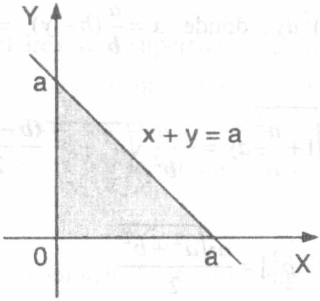
Para el eje x = a se tiene: $M_a = \int_0^b ay\,dy = \frac{ab^2}{2}$

Luego los momentos estáticos respecto a los ejes x e y respectivamente son:

$$M_b = \frac{a^2 b}{2},\ M_a = \frac{ab^2}{2}$$

1729 Hallar los momentos estáticos respecto a los ejes OX y OY y las coordenadas del centro de gravedad $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$.

Desarrollo



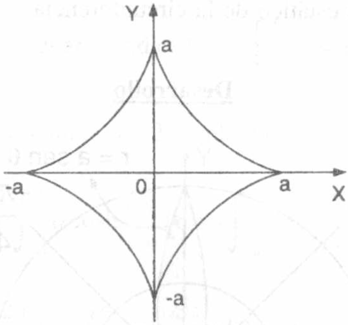
$$\text{Área} = \ A = \int_0^a (a-x)dx = \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{M}{y} = \int_0^a x(a-x)dx = a^{\frac{3}{6}} \quad \text{y} \quad \frac{M}{x} = \int_0^a y(a-y)dy = a^{\frac{3}{6}}$$

Para encontrar $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$ donde M es la masa y para este caso, M es el área; es decir: $M = A$ luego $\bar{x} = \frac{M_y}{A}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{A}$ de donde $\bar{x} = \bar{y} = \frac{a}{3}$ y los momentos estáticos $\frac{M}{x} = \frac{M}{y} = \frac{a^3}{6}$

1730 Hallar los momentos estáticos respecto a los ejes OX y OY y las coordenadas del centro de gravedad del arco de la astroide: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ situado en el primer cuadrante.

Desarrollo



$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}$ derivando $\frac{dy}{dx} = -\frac{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ se sabe que

$$M_x = \int_a^b y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx \,;\, M_y = \int_a^b x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy$$

$$M_x = \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}(\frac{a}{x})^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{5}a^2$$

realizando el mismo procedimiento se obtiene:

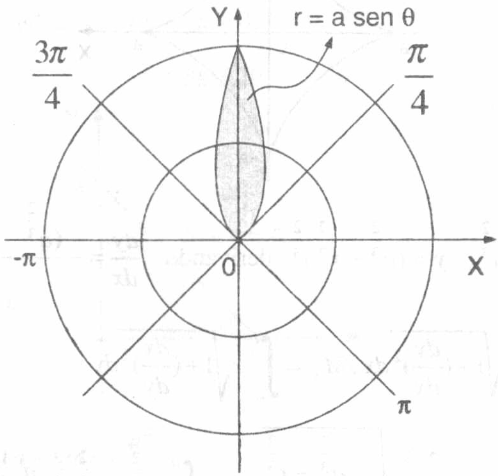
$M_y = \frac{3a^2}{5}$, las coordenadas del centro de gravedad son:

$\overline{x} = \frac{M_y}{M}$, $\overline{y} = \frac{M_x}{M}$, donde M es la masa total para nuestro caso, para el arco va de (0,a) y (a,0) de la curva: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ nos piden hallar $(\overline{x}, \overline{y})$, como $dx = a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx$.

$$A = \int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}a \quad \text{Luego:} \quad \overline{x} = \frac{\frac{3a^2}{5}}{\frac{3}{2a}} = \frac{2}{5}a \quad \text{en forma similar} \quad \overline{y} = \frac{2}{5}a$$

1731 Hallar el momento estático de la circunferencia $r = 2a \text{ sen } \theta$, respecto al eje polar.

Desarrollo



$$M = A = \int_0^{\pi} r^2 d\theta = \int_0^{\pi} 4a^2 sen^2\theta \, d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{\pi} (1-\cos 2\theta) d\theta = 2a^2(\theta - \frac{sen 2\theta}{2}) \Big/_0^{\pi} = 2a^2(\pi - 0) = 2a^2\pi$$

1732 Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a\cosh\frac{x}{a}$ comprendido entre $x = -a$ y $x = a$.

Desarrollo

$$y = a\cosh\frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad y' = senh\frac{x}{a}$$

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+senh^2\frac{x}{a}}\,dx = \cosh\frac{x}{a}\,dx$$

Sea L = longitud del arco indicado = $\int_{-a}^{a} ds = a\,senh\frac{x}{a}\Big/_{-a}^{a}$

L = a senh (1) – a senh (-1) = 2a senh (1)

$$M_x = \int_{-a}^{a} y\,ds = \int_{-a}^{a} a\cosh^2\frac{x}{a}dx = a\int_{-a}^{a}(\cosh\frac{2x}{a}+1)dx$$

$$M_x = a(\frac{a}{2}senh\frac{2x}{a}+x)\Big/_{-a}^{a} = [(\frac{a}{2}senh2+a)-(\frac{a}{2}senh(-2)-a)]$$

$$M_x = a(asenh(2)+2a) = a^2(2+senh(2))$$

$$M_y = \int_{-a}^{a} x\,ds = \int_{-a}^{a} x\cosh\frac{x}{a}dx = (axsenh\frac{x}{a} - a^2\cosh\frac{x}{a})\Big/_{-a}^{a}$$

$$M_y = (a^2senh(1) - a^2\cosh(1) - (-a^2senh(-1) - a^2\cosh(-1))$$

$$M_y = a^2(senh(1) - \cosh(1) + senh(-1) + \cosh(-1)) = 0$$

luego: $\bar{x} = \frac{M_y}{L} = \frac{0}{2asenh(1)} = 0$; $\bar{y} = \frac{M_y}{L} = \frac{a^2(2+senh(2))}{2asenh(1)}$

$$\bar{y} = \frac{a(2+senh(2))}{2senh(1)} \quad (\bar{x},\bar{y}) = (0,\frac{a(2+senh(2))}{2senh(1)})$$

1733 Hallar el centro de gravedad del arco de circunferencia de radio a, que subtiene el ángulo 2α.

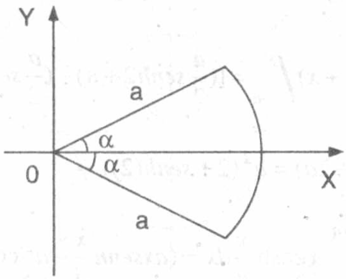
Desarrollo

Si $\bar{x}$ coincide con al abscisa del centro de gravedad de la mitad superior e $\bar{y} = 0$, tenemos: Si $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$, y, $1+(\frac{dx}{dy})^2 = \frac{a^2}{x^2}$

Puesto que $x^2+y^2=a^2$ para la mitad superior del arco se tiene: S = Γ - α.

$$a\alpha\bar{x}\int_0^{asen\alpha} x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy = a\int_0^{asen\alpha} dy$$

$$a\alpha\bar{x} = a^2 sen\alpha \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{asen\alpha}{\alpha}$$



Por lo tanto el centro de gravedad esta sobre la bisectriz a una distancia $a.\frac{sen\alpha}{\alpha}$ del centro de la circunferencia. Entonces el centro de gravedad del arco de circunferencia esta: $\bar{x}=\frac{asen\alpha}{\alpha}$, $\bar{y}=0$

1734 Hallar las coordenadas del centro de gravedad del primer cado de la cicloide: x = a (t – sen t), y = a (1 – cos t).

Desarrollo

Se conoce que $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=asen\frac{t}{2}dt$ puesto que

$$(dx)^2=a^2(1-\cos t)^2(dt)^2 \;\Rightarrow\; (dy)^2=a^2sen^2t(dt)^2$$

$$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=a\sqrt{(1-\cos t)^2+sen^2t}\,dt=a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt=2asen\frac{t}{2}dt$$

$$L=\int_0^{2\pi} ds=\int_0^{2\pi} 2asen\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big/_0^{2\pi}=8a$$

$$M_x=\int_0^{2\pi} y\,ds=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2asen\frac{t}{2}dt=4a^2\int_0^{2\pi} sen^3(\frac{t}{2})dt$$

$M_x=\dfrac{32}{3}a^2$ en forma similar para $M_y=8a^2\pi$.

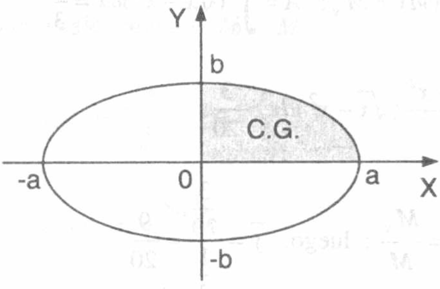
Luego el centro de gravedad es:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{L}=\frac{8a^2\pi}{8a}=a\pi\ ;\quad \bar{y}=\frac{M_x}{L}=\frac{\frac{32a^2}{3}}{8a}=\frac{4}{3}a\ \Rightarrow\ (\bar{x},\bar{y})=(a\pi,\frac{4}{3}a)$$

1735 Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ y por lo ejes de coordenadas OX y OY: $(x\geq 0,\ y\geq 0)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$.

Desarrollo

$$\bar{x}=\frac{4a}{3\pi},\quad \bar{y}=\frac{4b}{3\pi},\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ ;\quad M=\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{ab\pi}{4}$$

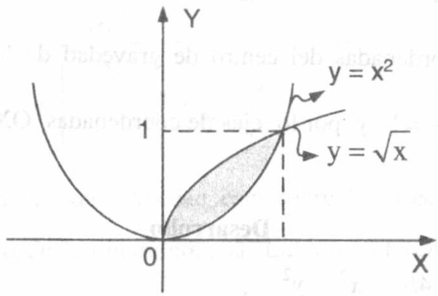
$$M_y=\int_a^b x\,f(x)dx=\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{ba^2}{3}$$

$$M_x = \int_a^b y\,f(y)dy = \int_0^b \frac{a}{b} y\sqrt{b^2 - y^2}\,dy = \frac{ab^2}{3}$$

Las coordenadas del centro de gravedad son: $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{4a}{3\pi}$; $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{4b}{3\pi}$

1736 Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Desarrollo



$$A\bar{x} = \int_a^b x\,f(x)dx = M_y; \quad A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}$$

$$A\bar{y} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + x^2}{2}(\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{3}{20}$$

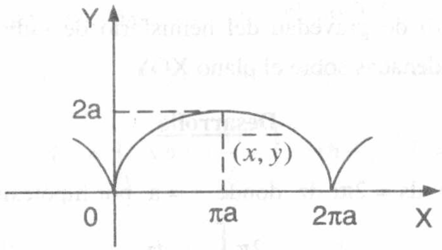
$$\bar{y} = \frac{M_x}{M}; \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M}: \text{ luego: } \bar{y} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}$$

para $\bar{x}$ se tiene: $A\bar{x} = \int_{-1}^{1} x(\sqrt{x} - x^2)dx$

$$A\bar{x} = \frac{3}{20} \Rightarrow \bar{x} = \frac{9}{20}; \text{ Luego: } \bar{x} = \bar{y} = \frac{9}{20}$$

1737 Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por el primer arco de la cicloide x = a (t – sen t), y = a (1 – cos t) y por el eje OX.

Desarrollo



x = a (t – sen t), y = a (1 – cos t)

$$M = \int_a^b y\,dx = \int_0^{2\pi a} y\,dx\,,\ (0{,}0)\ \text{si}\ t = 0,\ (2\pi a{,}0)\ \text{si}\ t = 2\pi$$

Ahora encontrando el área se tiene:

$$M = \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt$$

$M = 3a^2\pi$, ahora calcularemos M_x, M_y

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt = \frac{5a^3\pi}{2}$$

$$M_y = \int_a^b x\,f(x)dx = \int_0^{2\pi} a(t-sent)a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}(t-sent)(1-\cos t)^2\,dt = 3\pi^2 a^3$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{3a^3\pi^2}{3\pi a^2} = \pi a \ ; \ \ \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{5a^3\pi}{2}}{3a^2\pi} = \frac{5}{6}a \ \ \Rightarrow \ \ (\bar{x},\bar{y}) = (\pi a, \frac{5}{6}a)$$

1738 Hallar el centro de gravedad del hemisferio de radio a con el centro en el origen de coordenadas sobre el plano XOY.

Desarrollo

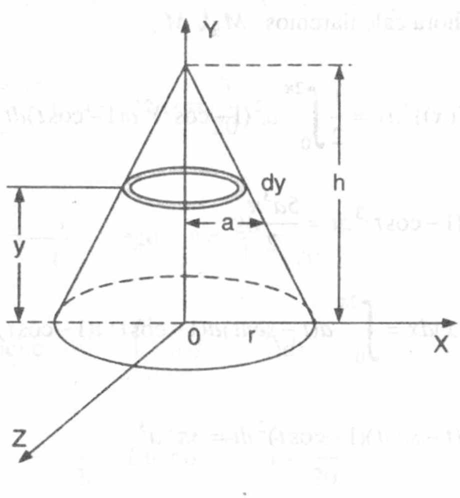
Se conoce que ds = 2πr dz, donde r = a por hipótesis y dz es la altura de la zona esférica.

$$z = \frac{2\pi\int_0^a az\,dz}{2\pi a^2} = \frac{1}{a}\int_0^a z\,dz = \frac{a}{2}$$

como x = y = 0 ⇒ el centro de gravedad es $(0,0,\frac{a}{2})$

1739 Hallar el centro de gravedad de un cono circular recto homogéneo, si el radio de la base es r y la altura es h.

Desarrollo



Por simetría se tiene que el centro de gravedad se encuentra en el eje Y; luego: $\bar{x} = \bar{z} = 0$

Calcularemos M_{xz} = momento estático del cono, respecto del plano XZ. El disco de la figura de base paralelo al plano XZ., tiene volumen $dv = \pi a^2 dy$, donde el radio a, por semejanza de triangulo se tiene: $a = \frac{r}{h}(h-y)$; Luego tenemos que: $M_{xz} = \int_0^h y\,dv = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h y(h-y)^2 dy = \frac{\pi r^2 h^2}{12}$

Luego $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{y} = \frac{h}{4}$ puesto que $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Luego el centro de gravedad esta a la distancia de $\frac{3}{4}h$ a partir de la base del cono.

1740 Hallar el centro de gravedad del hemisferio de una bola homogénea de radio a, con el centro en el origen de coordenadas situado sobre el plano XOY.

Desarrollo

Determinaremos $\bar{z}$ para esto se tiene lo siguiente: la masa de una de las caras elementales (dividido el hemisferio) por medio de planos paralelos se tiene: $dm = P\pi r^2 dz$, donde P es la densidad, z la distancia entre el plano secante y la base del hemisferio, $r = \sqrt{a^2 - z^2}$, el radio de la sección, tenemos:

$$z = \frac{\pi\int_0^a (a^2 - z^2)dz}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8}a\text{; Luego por simetría se tiene: } x = y = 0$$

El centro de gravedad es: $C.G. = (0, 0, \frac{3}{8}a)$

1741 Hallar el momento de inercia de una circunferencia de radio a, respecto a su propio diámetro.

Desarrollo

Se conoce que: $I = 4\int_0^a y^2\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$

Donde la ecuación de la circunferencia de radio a, es:

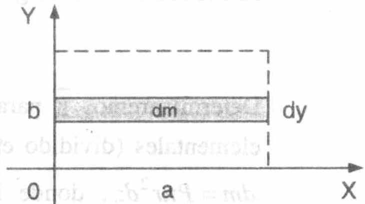
$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2 \text{ y } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$I = 4\int_0^a (a^2 - x^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$I = 4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = 4a^3(\frac{\theta}{2} + \frac{sen\theta.\cos\theta}{2})\Big/_0^{\pi} \Rightarrow I = 2a^3(\frac{\pi}{2}) = \pi a^3$$

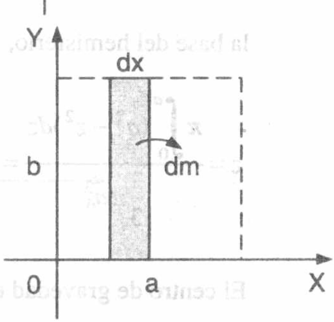
1742 Hallar el momento de inercia de un rectángulo de lados a y b, respecto a estos lados: I_a, I_b.

Desarrollo



Se conoce que $I = \int r^2 dm$

$$I_a = \int_0^b y^2 dm = a\int_0^b y^2 dy = \frac{ay^3}{3}\Big/_0^b = \frac{ab^3}{3}$$



$I_b = \int_0^a x^2 dm$, donde dm = b dx

$$I_b = \int_0^a x^2 b\,dx = b\frac{x^3}{3}\Big/_0^a \Rightarrow I_b = \frac{ba^3}{3}$$

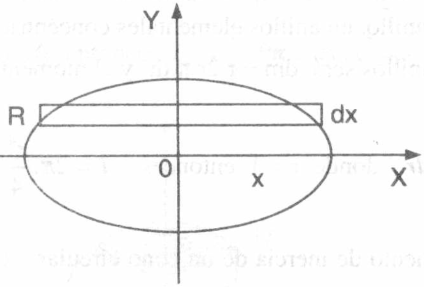
1743 Hallar el momento de inercia de un segmento parabólico recto, respecto a su eje de simetría si la base es 2b y la altura es h.

Desarrollo

$$I = \frac{4hb^3}{15}$$

1744 Hallar el momento de inercia de la superficie de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, respecto a sus ejes principales.

Desarrollo



De acuerdo a la figura, el momento de inercia del tubo cilíndrico generado por rotación alrededor del eje X, del rectángulo R de la figura que tiene por base dy, y altura 2x.

Es decir: $dI_a = y^2 dv = y^2(2\pi y)(2x)dy$

$dI_a = 4\pi y^3 x\,dx$ Luego $I_a = \int_0^b dI_a = 4\pi \int_0^b y^3 x\,dy$

para esto paramétrizamos haciendo:

x = a cos t, y = b sen t; $I_a = 4\pi \int_0^b b^3 sen^3 t.a \cos t.b \cos t\, dt$

$$I_a = 4\pi ab^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 t \cos^2 t\, dt = 4\pi ab^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^2 t.sent\, dt$$

$$= 4\pi ab^4 (-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5}) \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi ab^4}{15}$$ en forma similar para el otro caso.

1745 Hallar el momento polar de inercia de un anillo circular de radios R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$, es decir el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro del anillo y es perpendicular el plano del mismo.

Desarrollo

Dividimos el anillo, en anillos elementales concéntricos, donde la masa de cada uno de estos anillos será dm = r 2r π dr y el momento de inercia es:

$I = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$, donde r = 1 entonces $I = 2\pi.\frac{r^4}{4} \Big/_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4)$

1746 Hallar el momento de inercia de un cono circular recto homogéneo, respecto a su eje, si el radio de la base es R, y la altura es H.

Desarrollo

Dividimos en una serie de tubos cilíndricos elementales paralelos al eje del cono.

El volumen de uno de estos tubos elementales será dv = 2πrhr dr, donde r es el radio del tubo; es decir la distancia hasta el eje del cono.

$h = H(1-\frac{r}{R})$ es la altura del tubo, en este caso el momento de inercia es:

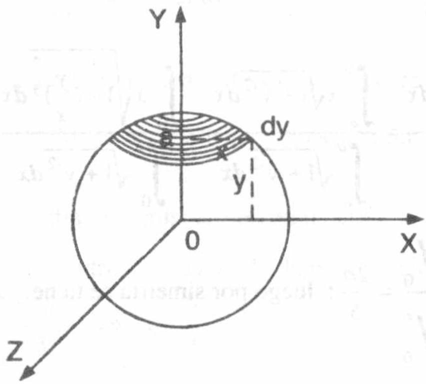
$$I = r\int_0^R 2\pi H(1-\frac{r}{R})r^3 dr$$

calculando la integral se tiene: $I = \frac{r\pi R^4 H}{10}$ donde r es la densidad del cono.

1747 Hallar el momento de inercia de una bola homogénea de radio a y masa M, respecto a su diámetro.

Desarrollo

Escogemos un disco delgado paralelo al plano XZ y suponiendo que la densidad es P, el momento de inercia de un disco delgado de radio x, respecto al eje Y es $\frac{M}{2}x^2$ para hallar el momento de inercia I_y de toda la esfera se suman los momentos individuales que acabamos de hallar en donde: $dM = P\,dv = P\pi x^2 dy$ entonces $I_y = \frac{1}{2}(P\pi x^2 dy)x^2 = \frac{\pi}{2}Px^4 dy$



La ecuación de la sección de la esfera en el plano XY (circulo) es $x^2 + y^2 = R^2$, donde R = a.

Luego: $I_y = \frac{\pi P}{z}\int_{-a}^{a}(a^2 - y^2)dy = \frac{8}{15}\pi P R^5$ como la masa es $m = \frac{4}{3}\pi a^3 P$;

se tiene: $I_y = (\frac{4}{3}\pi a^3 P)(\frac{2a^2}{5}) = \frac{2}{5}Ma^2$ Respuesta: $I_y = \frac{2}{5}Ma^2$

1748 Hallar el área y el volumen de un tubo engendrado por la revolución de un círculo de radio a, alrededor de un eje situado en el mismo plano que el círculo y que se encuentra a una distancia b $(b \geq a)$ del centro de este.

Desarrollo

$$V = 2\pi^2 a^2 b\,; \quad S = 4\pi^2 ab$$

1749 **a)** Determinar la posición del centro de gravedad del arco de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ situado en el primer cuadrante.

b) Hallar el centro de gravedad de la figura limitada por la curvas: $y^2 = 2px$ y $x^2 = 2py$.

Desarrollo

a) $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{2a}{5}$ **b)** $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{9p}{10}$

a) $$\bar{x} = \frac{\int_A^B x\,dx}{a} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx} = \frac{\int_0^a x\sqrt{1+(\frac{y}{x})^{\frac{2}{3}}}\,dx}{\int_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big/_0^a}{\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big/_0^a} = \frac{2a}{5}$$; luego por simetría se tiene: $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{2a}{5}$

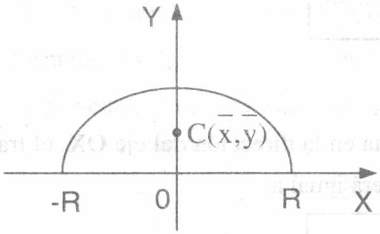
b) En forma similar el caso desarrollado de a)

1750 **a)** Hallar el centro de gravedad del semicírculo, aplicando el teorema de guldin.

b) Demostrar aplicando el teorema de guldin que es el centro de gravedad de un triangulo dista de su base a un tercio de la altura.

Desarrollo

a)



Al girar la figura genera un cono cuyo volumen es: $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ según el teorema de guldin el producto del área de dicha figura por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad, es igual al volumen entonces:

Área de la circunferencia $= \frac{\pi R^2}{2}$; longitud de la circunferencia $= 2\pi\bar{y}$

comparando y efectuando se tiene: $\frac{\pi R^2}{2}(2\pi\bar{y}) = \frac{4}{3}\pi R^3$

de donde $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$ por lo tanto $(0, \frac{4R}{3\pi})$

b) Al girar el triangulo alrededor de su base genera un cono cuyo volumen es: $V = \frac{\pi bh^2}{3}$ donde b es la base y h es la altura del triangulo, según el teorema de guldin este mismo volumen seria: $V = 2\pi(\frac{bh\bar{x}}{2})$ donde $\bar{x}$ es la distancia del centro de gravedad a la base. luego comprobando se tiene:

$$2\pi(\frac{bh\bar{x}}{2}) = \frac{\pi bh^2}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{h}{3}$$

6.6. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE FISICA.

1 TRAYECTORIA RECORRIDA POR UN PUNTO.-

Si un punto se mueve sobre una curva y el valor absoluto de su velocidad v = f(t) es una función conocida del tiempo t, el espacio recorrido por dicho punto en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ ser igual a:

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt}$$

② **TRABAJO DE UNA FUERZA.-**

Si una fuerza variable x = f(x) actúa en la dirección del eje OX, el trabajo de esta fuerza es el segmento $[x_1, x_2]$ será igual a:

$$\boxed{A = \int_{x_2}^{x_1} f(x)dx}$$

③ **ENERGIA CINETICA.-**

Se da el nombre de energía cinética de un punto material, de masa m y velocidad v, a la siguiente expresión:

$$\boxed{k = \frac{mv^2}{2}}$$

La energía cinética de un sistema de n puntos materiales de masas m_1, m_2, ..., m_n, cuyas velocidades respectivas sean v_1, v_2, ..., v_n es igual a:

$$\boxed{k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}}$$

Para calcular la energía cinética de un cuerpo, hay que dividirlos convenientemente en partes elementales (que juegan el papel de puntos materiales) y después, sumando la energía cinética de estas partes, y pasando a limites, en lugar de la suma (1) se obtendrá la correspondiente integral.

④ **PRESION DE LOS LIQUIDOS.-**

Para calcular la fuerza con que presionan los líquidos se emplea la ley de pascal, según la cual, la presión que ejercen los líquidos sobre una área s sumergía a una profundidad h es igual a: p = γhs, donde γ es el peso especifico del liquido.

1751 La velocidad de un cuerpo, lanzado hacia arriba verticalmente con una velocidad inicial v_0, despreciando la resistencia del aire, se expresa por la formula: $v = v_0 - gt$, donde t es el tiempo transcurrido y g es la aceleración de la gravedad. a que distancia de la posición inicial se encontrara este cuerpo a los t seg. de haberlo lanzado?

Desarrollo

datos: $\begin{cases} v = v_0 - gt \\ \text{t = tiempo} \\ \text{g = aceleración de la gravedad} \end{cases}$

cálculo de la distancia recorrida a los t seg.

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - gt \quad \Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t (v_0 - gt)dt$$

$$s = (v_0 t - g\frac{t^2}{2}) \Big/_0^t = v_0 t - g\frac{t^2}{2} \qquad \therefore \quad s = v_0 t - g\frac{t^2}{2}$$

1752 La velocidad de un cuerpo, lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0, contando la resistencia del aire, se expresa por la fórmula $v = c.tg(-\frac{g}{c}y + arctg\frac{v_0}{c})$ donde t es la tiempo transcurrido, g es la aceleración de la gravedad y c es una constante. hallar la altura a que se eleva el cuerpo.

Desarrollo

datos: $\begin{cases} v = c.tg(-g\frac{t}{c} + arctg(\frac{v_0}{c})) \\ \text{t = tiempo} \\ \text{c = constante} \\ \text{g = gravedad} \end{cases}$

$$v = \frac{dh}{dt} = c.tg(-g\frac{t}{c} + arctg\frac{v_0}{c})$$

$$\int_0^h dh = \int_0^t [c.tg(-g\frac{t}{c} + arctg\frac{v_0}{c})]dt$$

$$h = -\frac{c^2}{g}\ln|\sec(-g\frac{t}{c} + arctg\frac{v_0}{c})| \Big/_0^t$$

$$h = -\frac{c^2}{g}\ln|\sec(-g\frac{t}{c} + arctg\frac{v_0}{c}| + \frac{c^2}{g}\ln(1+\frac{v_0^2}{c^2})$$

$$h = -h + \frac{c^2}{g}\ln(1+\frac{v_0^2}{c^2}) \Rightarrow 2h = \frac{c^2}{g}\ln(1+\frac{v_0^2}{c^2}) \text{ de donde } h = \frac{c^2}{2g}\ln(1+\frac{v_0^2}{c^2})$$

1753 Un punto del eje OX vibra armónicamente alrededor del origen de coordenadas con una velocidad que viene dada por la fórmula $v = v_0 \cos \omega t$, donde t es el tiempo y v_0 y ω son unas constantes. hallar la ley de la vibración del punto, si para t = 0, tenia una abscisa x = 0. a que será igual el valor medio de la magnitud absoluta de la velocidad del punto durante el periodo de la vibración.

Desarrollo

$v = v_0 \cos \omega t$, t = 0, x = 0

a) calculo de la ley de vibración del punto.

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \omega t \Rightarrow dx = v_0 \cos \omega t\, dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cos \omega t\, dt \text{ , de donde } x = \frac{v_0}{\omega} sen\omega t \Big/_0^t = \frac{v_0}{\omega} sen\omega t$$

$$\therefore \quad x = \frac{v_0}{\omega} sen\omega t$$

1754 La velocidad del movimiento de un punto es: $v = te^{-0.001t}\dfrac{m}{seg}$. hallar el camino recorrido por dicho punto desde que comenzó a moverse hasta que paro por completo.

Desarrollo

dato: $v = te^{-0.01t}$

calculo del camino recorrido por un punto desde que comenzó hasta que paro.

$$v = \frac{ds}{dt} = te^{-0.01t}, \text{ integrando } \int_0^s ds = \int_0^t te^{-0.01t}\,dt = -\frac{e^{-0.01t}(0.01t-1)}{(0.01)^2} \Big/_0^t$$

$$s = \frac{e^{-0.01t}(1-0.01t)}{0.0001}$$

el punto para que se pare por completo es cuando $v = 0 \Rightarrow t = 0$.

para $t = 0$, $s = \dfrac{1}{(10)^{-4}}m = 10^4 m$ $\qquad \therefore \; s = 10^4 m$

1755 Un proyectil cohete se levanta verticalmente. suponiendo que, siendo constante la fuerza de arrastre, la aceleración del cohete aumenta a causa e la disminución de su pero según la ley: $j = \dfrac{A}{a-bt}$, $(a - bt > 0)$. hallar la longitud del cohete en cualquier instante t, si su velocidad inicial es igual a cero. hallar también la altura que alcanza el cohete en el instante $t = t_1$.

Desarrollo

a) Calculo de la velocidad del cohete:

Datos: $\quad v_0 = 0 \;\; ; \;\; j = \dfrac{A}{a-bt}$, $a - bt > 0$

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{A}{a-bt} \Rightarrow dv = \frac{A\,dt}{a-bt}$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{A\,dt}{a-bt} \Rightarrow v = -\frac{A}{b}\ln(a-bt)\Big/_0^t$$

$$v = -\frac{A}{b}\ln(a-bt) + \frac{A}{b}\ln a = \frac{A}{b}\ln(\frac{a}{a-bt}) \qquad \therefore \quad v = \frac{A}{b}\ln(\frac{a}{a-bt})$$

b) Calculo de la altura en el instante t.

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{A}{b}\ln(\frac{a}{a-bt}) = \frac{A}{b}\ln a - \frac{A}{b}\ln(a-bt) \Rightarrow ds = \frac{A}{b}(\ln a - \ln(a-bt))dt$$

$$\int_0^s ds = \frac{A}{b}\int_0^t (\ln a - \ln(a-bt))dt$$

$$s = \frac{A}{b}[t\ln a - t\ln(a-bt) + t + \frac{a}{b}\ln(a-bt)]\Big/_0^t$$

$$s = \frac{A}{b^2}[bt\ln a - bt\ln(a-bt) + bt + a\ln(a-bt)]\Big/_0^t$$

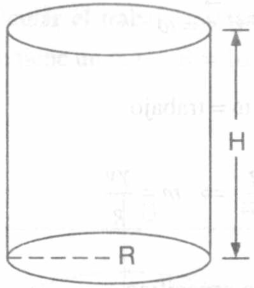
$$s = \frac{A}{b^2}(bt\ln a - bt\ln(a-bt) + bt + a\ln(a-bt) - a\ln a)$$

$$s = \frac{A}{b^2}(bt - (a-bt)\ln a + (a-bt)\ln(a-bt))$$

$$s = \frac{A}{b^2}(bt + (a-bt)\ln(\frac{a-bt}{a})) \qquad \therefore \quad s = \frac{A}{b^2}(bt - (a-bt)\ln(\frac{a}{a-bt}))$$

1756 Calcular el trabajo necesario para sacar agua que hay en una cuba cilíndrica vertical, que tiene un radio de base R y una altura H.

Desarrollo



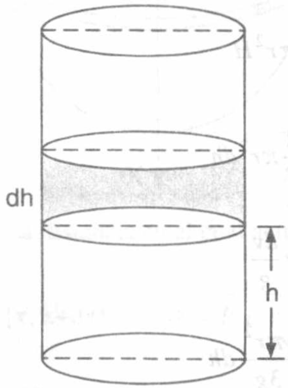
$$\omega = F\, d\vec{s} = E_p$$

$$E_p = mgh\ ,\quad \gamma = \frac{mg}{v}$$

$$m = \frac{\gamma v}{g} \text{ donde } \gamma = \text{peso especifico}$$

$V = \pi R^2 H$, derivando se tiene:

$$dV = \pi R^2 dh \qquad \textbf{... (1)}$$



$$dE_p = d(mgh)$$

calculando dm:

$$m = \frac{\gamma v}{g} \Rightarrow dm = \gamma \frac{dv}{g} \qquad \textbf{... (2)}$$

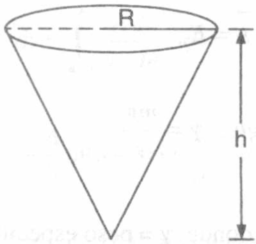
ahora (1) en (2) se tiene: $dm = \gamma\pi R^2 \dfrac{dh}{g}$ y $dE_p = (\gamma\pi R^2 \dfrac{dh}{g})gh$

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^H \frac{\gamma\pi R^2}{g} gh\,dh = \gamma\pi R^2 \int_0^H h\,dh$$

$$E_p = \frac{\gamma\pi R^2 H^2}{2} \text{ pero } E_p = \omega \text{ por lo tanto } \omega = \frac{\pi\gamma R^2 H^2}{2}$$

1757 Calcular el trabajo necesario para sacar el agua que hay en un recipiente cónico, con el vértice hacia abajo, cuyo radio de la base es R y la altura H.

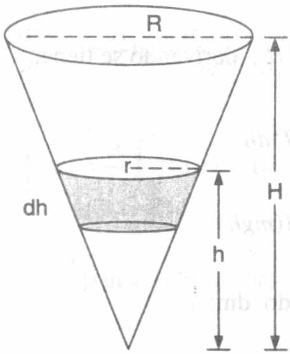
<u>Desarrollo</u>



$$E_p = F\, d\vec{s} = \omega$$

donde ω = trabajo

$$\gamma = \frac{mg}{v} \Rightarrow m = \frac{\gamma v}{g} \qquad \text{... (1)}$$



γ = peso especifico

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

$$dV = \frac{1}{3}\pi r^2 dh \qquad \text{... (2)}$$

$$dm = \gamma \frac{dv}{g} \qquad \text{... (3)}$$

reemplazando (2) en (3) se tiene: $dm = \dfrac{\gamma\pi r^2}{3g} dh$

$$E_p = mgh \Rightarrow dE_p = d(mgh)$$

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^H \frac{\gamma\pi r^2}{3g}(gh)dh\,, \quad \text{ahora cambio de } r \text{ a } R$$

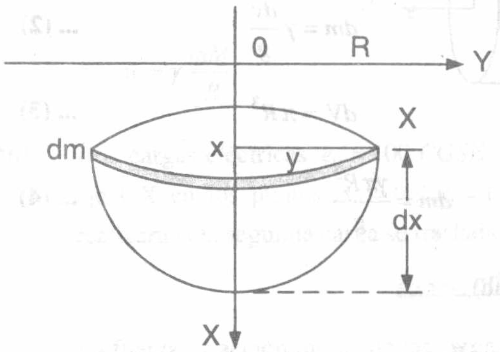
$$\frac{h}{r} = \frac{R}{H} \Rightarrow r = \frac{Rh}{H}$$

$$E_p = g\frac{\pi r}{3}\int_0^H h\left(\frac{Rh}{H}\right)^2 h^2 dh \Rightarrow E_p = \frac{\gamma\pi R^2}{3H^2}\int_0^H h^3 dh = \frac{\gamma\pi R^2 H}{12}$$

$$\therefore \quad E_p = \frac{\gamma\pi R^2 H}{12}$$

1758 Calcular el trabajo necesario para sacar el agua de una caldera semiesférica, que tiene un radio R = 10 m.

Desarrollo



El disco comprendido entre x y x + dx tiene un volumen.

$$dV = \pi y^2 dx = \pi(R^2 - x^2)dx$$

La fuerza $\vec{F}$ requerida para bombear el agua de este dV es igual a su peso.

$$p\,dV = p\pi(R^2 - x^2)dx$$

La distancia en el cual actúa esta fuerza es:

[x, x+dx] $\Rightarrow dW = \vec{F}.d\vec{r} = p\pi(R^2 - x^2)x\,dx$, integrando en ambos miembros:

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^R p\pi(R^2 - x^2)x\,dx = p\pi(\frac{R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4})\Big/_0^R$$

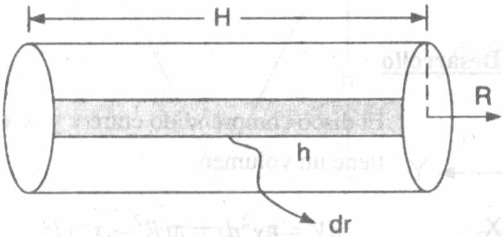
$\omega = p\dfrac{\pi R^4}{4} = (0.79)10^3\,x10^4$,. siendo p el peso de 1 dm^3 de agua

$\therefore \quad \omega = 0.79\,x10^7\ kg - f\,/\,m$

1759 Calcular el trabajo necesario para sacar, por el orificio superior, el aceite contenido en una cisterna de forma cilíndrica con el eje horizontal, si el peso especifico del aceite es γ, la longitud de la cisterna H, y el radio de la base R.

Desarrollo

$$\gamma = \frac{mg}{v} \Rightarrow m = \frac{\gamma v}{g} \quad \dots (1)$$



$V = \pi R^2$, R = altura

$$dm = \gamma \frac{dv}{g} \quad \dots (2)$$

$$dV = \pi R^3 \quad \dots (3)$$

ahora (3) en (2) se tiene: $$dm = \frac{\gamma \pi R^3}{g} \quad \dots (4)$$

$E_p = \omega = mgh \Rightarrow d\omega = d(gmh)$

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^H \frac{\gamma \pi R^3}{g}.g dh = \gamma \pi R^3 \int_0^H dh \Rightarrow \omega = \gamma \pi R^3 H$$

1760 Que trabajo hay que realizar para levantar un cuerpo de masa m, de la superficie de la tierra, cuyo radio es R, a una altura h?. A que será igual este trabajo si hay que expulsar el cuerpo al infinito.

Desarrollo

Según la ley de gravitación universal, la fuerza F que ejerce la tierra un cuerpo de masa m esta dado por: $F = \gamma \frac{mM}{R^2}$ donde γ = constante de gravitación

M = masa de la tierra, m = masa de un cuerpo cualquiera

R = radio de la tierra

$$w = \int_R^{R+h} \gamma \frac{mM}{R^2} dR = -\gamma \frac{mM}{R} \Big/_R^{R+h} \Rightarrow w = \gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) \quad \dots (1)$$

como la fuerza atracción es igual peso (mg)

$$\Rightarrow \quad mg = \gamma\frac{mM}{R^2} \quad \Rightarrow \gamma = \frac{gR^2}{M} \qquad \text{... (2)}$$

de (2) en (1) se tiene: $W = \dfrac{gmh}{1+\dfrac{h}{R}}$ si hay que expulsar el cuerpo al infinito h→∞

$$\therefore \quad w = \gamma\frac{mM}{R}$$

1761 Dos cargas eléctricas $e_0 = 100\ CGSE$ y $e_1 = 200\ CGSE$, se encuentran en el eje OX en los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1\ cm$, respectivamente. ¿Que trabajo se realizara si la segunda carga se traslada al punto $x_2 = 10\ cm$?

Desarrollo

La fuerza de acción mutua de las cargas será $F = \dfrac{e_0 e_1}{x^2}$ dinas, por consiguiente, el trabajo necesario para trasladar la carga e_1 desde el punto x_1 al punto x_2 será: $w = e_0 e_1 \int_{x_1}^{x_2} \dfrac{dx}{x^2} = e_0 e_1 (\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}) = 1.8x10^4$ ergios

$$\therefore \quad w = 1.8x10^4 \text{ ergios}$$

1762 Un cilindro con un embolo móvil, de diámetro D = 20 cm., y de longitud ℓ = 80 cm., esta lleno de vapor a una presión de $p = 10\ kgf / cm^2$. ¿Qué trabajo hace falta realizar para disminuir el volumen del vapor en dos veces si la temperatura es constante (proceso isotérmico)?

Desarrollo

Para el proceso isotérmico $pv = p_0 v_0$. El trabajo realizado en al expresión del gas desde el volumen v_0 hasta el volumen v_1 es igual a:

$$w = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1}} p\,dv = p_0 v_0 \ln\frac{v_1}{v_0} = 800\pi \ln 2 \text{ kgf / m} \qquad \therefore \quad w = 800\pi \ln 2 \text{ kgf / m}$$

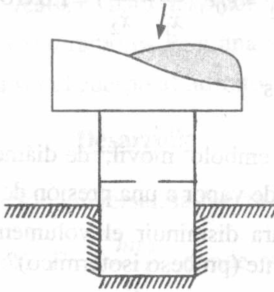
1763 Determinar el trabajo realizado en la expresión adiabática del aire, hasta ocupar en volumen $v_1 = 10\ m^3$, si el volumen inicial es $v_0 = 1\ m^3$ y la presión $p_0 = 1$ kgf / cm^2.

Desarrollo

Para el proceso adiabático es valida la ley de Paisson $pv^k = p_0 v_0^k$, donde k ≈ 1.4, de donde: $w = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1}} \frac{p_0 v_0}{k} = \frac{p_0 v_0}{k-1}[1 - (\frac{v_0}{v_1})^{k-1}]$

de donde al reemplazar sus valores se tiene: w ≈ 15,000 kg – f / m

1764 Un árbol vertical, de peso P y radio a, se apoya en una zanja AB la fricción entre una parte pequeña o de la base del árbol y la superficie del apoyo que esta en contacto con ella es igual a F = upo donde p = constante es la presión del árbol sobre la superficie del apoyo, referida a la unidad de superficie del mismo , y u es el coeficiente de función. Hallar el trabajo de la fuerza de fricción en una revolución del árbol.



Desarrollo

Si a es el radio de la base del árbol, la presión s sobre la unidad de superficie de apoyo será $P = \frac{p}{\pi a^2}$, la fuerza de frotamiento de un anillo de anchura dr, que se encuentra a una distancia r del centro, será igual a $\frac{2up}{a^2} r\, dr$.

El trabajo de la fuerza de frotamiento, sobre estos anillos, durante una vuelta completa es: $dw = \frac{4\pi upr^2}{a^2}dr$, por lo cual el trabajo total

$$w = \frac{4\pi up}{a^2}\int_0^a r^2 dr = \frac{4}{3}\pi upa$$

1755 Calcular la energía cinética de un disco, de masa M y radio R, que gira alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano del disco con una velocidad angular ω.

Desarrollo

La energía cinética de un elemento del disco:

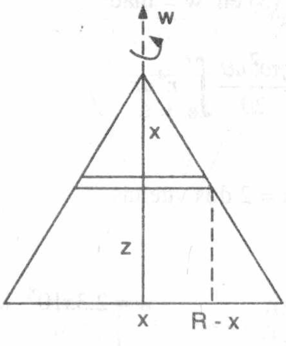
$$dk = \frac{v^2 dm}{2} = \frac{pr^2\omega^2}{2}d\sigma\text{ , donde } d\sigma = 2\pi r\,dr$$

es el elemento de superficie, r, su distancia al eje de giro; p, la densidad superficial $p = \frac{M}{\pi R^2}$ de esta forma $dk = \frac{M\omega^2}{2\pi R^2}r^2 dr$, de donde:

$$k = \frac{M\omega^2}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2\omega^2}{4} \qquad \therefore \quad w = \frac{MR^2\omega^2}{4}$$

1766 Calcular la energía cinética de un cono circular recto, de masa M, que gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω. El radio de la base del cono es R, la altura H.

Desarrollo



$$(dm)_{disco} = \rho\, dV = \frac{M}{\frac{\pi R^2 H}{3}}\pi x^2 dz = \frac{3Mx^2 dz}{R^2 H}$$

$$(dE_c)_{disco} = \frac{w^2 x^2}{4}.\frac{3Mx^2}{R^2 H}dz = \frac{3Mw^2 x^4 dz}{4R^2 H}$$

$$\frac{Z}{R-x} = \frac{H}{R} \Rightarrow dz = -\frac{H}{R}dx$$

$$(E_c)_{cono} = \int_R^0 \frac{3Mw^2x^4}{4R^2H}(-\frac{H}{R})dx = \int_0^R \frac{3Mw^2}{4R^3}x^4 dx = \frac{3Mw^2x^5}{20R^3} \Big/_0^R$$

$$E_c = \frac{3Mw^2R^2}{20}$$

1767 Que trabajo es necesario realizar para detener una bola de hierro de radio R = 2m que gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular ω = 1000 vueltas / crecimiento?. (El peso especifico del hierro es $r = 7.8$ gf / cm^3).

Desarrollo

w = mad, hallamos masas "m" sabemos que:

$$\gamma = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \gamma V \Rightarrow M = \frac{4}{3}\pi r^3 \gamma \qquad \text{... (1)}$$

hallamos la aceleración a, este caso seria "a" por cinemática:

$$\omega^2 = 2a\theta \Rightarrow \theta = \frac{\omega^2}{2\theta} \qquad \text{... (2)}$$

hallamos la distancia "d" este caso seria la longitud de arco:

$$2\pi r(\frac{\theta}{2\pi}) = d \Rightarrow d = n\theta r \qquad \text{... (3)}$$

para n vueltas. Reemplazando (1), (2) y (3) en w = mad

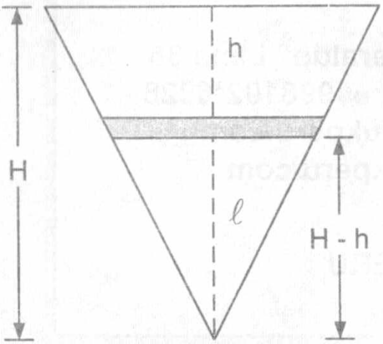
$$w = \frac{4}{3}\pi\gamma r^3 \frac{\omega^2}{2\theta}.n\theta r \quad \text{de donde} \quad w = \frac{4}{3}\pi \frac{\gamma\omega^2 n\theta}{2\theta}\int_0^r r^4 dr$$

$$w = \frac{4}{3}\pi\gamma\omega^2 n\frac{r^5}{5} = (\frac{4}{3}\gamma\pi r^3)\frac{\omega^2 r^2}{5} \quad \text{para } n = 2 \text{ dos vueltas}$$

$$\therefore \quad w = \frac{N}{5}\omega^2 r^2 \ \text{kgf / m} \qquad\qquad w = 2.3x10^8 \ \text{kg - f / m}$$

1768 Un triangulo de base b y altura h esta sumergido verticalmente en agua, con el vértice hacia abajo, de forma que su base coincide con la superficie del agua. Hallar la presión que el agua ejerce sobre el.

Desarrollo



Se sap que $dp = \rho h\ell\, dh \Rightarrow$ por relación

$$\frac{H-h}{\ell}=\frac{H}{B} \Rightarrow \ell=\frac{B(H-h)}{H}$$

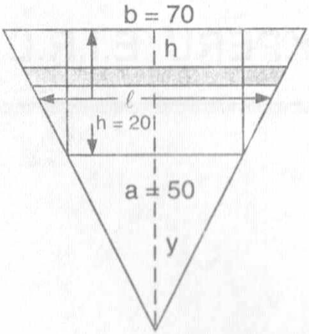
$$F=\int_0^H \rho h\ell dh=\int_0^H \rho hB(\frac{H-h}{H})dh$$

$$F=\rho\frac{B}{H}(\frac{3H^3-2H^3}{6})\Big/_0^H=\rho\frac{B}{H}.\frac{H^3}{6}$$

$$F=r.\frac{BH^2}{6}$$

1769 Una presa vertical forma de trapecio. Calcular la presión total del agua sobre dicha presa, sabiendo que la base superior tiene a = 70 cm, la base inferior b = 50 cm y su altura h = 20 cm.

Desarrollo



$p = \gamma h$

empleando semejanza de triangulo se tiene:

$$\frac{y}{a}=\frac{y+h}{b} \Rightarrow \frac{y}{50}=\frac{y+20}{70} \Rightarrow y = 525$$

$$\frac{725}{70}=\frac{725-h}{\ell} \Rightarrow \ell=(725-h)\frac{70}{725}$$

$$p=\gamma\int_0^{20}(725-h)\frac{70}{725}h\,dh \qquad \therefore\ p = 113.60\ \text{tm}$$

Eduardo Espinoza Ramos

Graduado y Titulado en Matemática Pura.

Catedrático de las principales Universidades de la Capital

OBRAS PUBLICADAS:

- Solucionario de Análisis Matemático por Deminovich tomo I, III
- Solucionario de Análisis Matemático por G.Berman, tomo I, II, III
- Solucionario de Matemática Aplicada a la Administración y Economía por E.WEBER.
- Solucionario de Leithold 2da. Parte.
- Geometría Vectorial en R^2
- Geometría Vectorial en R^3